Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (P)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$, sodass die für die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $x \mapsto Ax$ gilt, dass $\phi \neq 0$ und $\phi^2 := \phi \circ \phi = 0$.

b) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\psi : V \to V$ eine lineare Abbildung und es gelte $\psi^k \neq 0$ und $\psi^{k+1} = 0$ für ein $k > 0$. Zeigen Sie, dass es ein Element $x \in V$ gibt, so dass die Menge $\{x, \psi(x), \cdots, \psi^k(x)\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 2 (P)

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit $\Phi(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Bestimmen Sie Kern Φ, Bild Φ und deren Dimensionen.

c) Zeigen Sie, dass $\Phi \circ \Phi = \Phi$ ist.
Bemerkung: Eine lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft nennt man eine Projektion.

Aufgabe 3

Gegeben seien ein Körper $\mathbb{K}$ und die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X], \quad \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} i \cdot a_i X^{i-1}.$$

a) Ist Φ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Homomorphismus?

b) Bestimmen Sie Kern Φ und Bild Φ.

c) Ist Φ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Abgabe der Lösungen bis zum 16.01.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.