Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (P)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weiter sei $\Phi\colon V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Φ ist genau dann injektiv, wenn für jede linear unabhängige Teilmenge M von V das Bild $\Phi(M)$ linear unabhängig in W ist.

b) Φ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes Erzeugendensystem M von V das Bild $\Phi(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

c) Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für jede Basis M von V das Bild $\Phi(M)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 2 (P)

Bezeichne V den reellen Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ und $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit d Elementen. Seien

$$U_1 := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \forall m \in M : f(m) = 0\},\ U_2 := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq d-1\}$$

zwei Untervektorräume von V und weiter $\Phi : V \to \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ die durch $\Phi(f)(m) := f(m)$ gegebene lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi|_{U_2} : U_2 \to \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

b) Folgern Sie mit dem Homomorphiesatz, dass auch gilt: $V/U_1 \cong \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$.

c) Folgern Sie, dass U_2 ein Komplement von U_1 ist.

Hinweis: Ein Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}_0$ über einem Körper $\mathbb{K}$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{K}$.

Aufgabe 3

Gegeben seien $\mathbb{K}$-Vektorräume V_1, V_2, V_3 sowie lineare Abbildungen $\Phi : V_1 \to V_2$ und $\Psi : V_2 \to V_3$. Zeigen Sie

a) $\mathrm{Rang}(\Psi \circ \Phi) = \mathrm{Rang}(\Phi) - \dim(\mathrm{Bild}\Phi \cap \mathrm{Kern}\Psi)$.

b) $\mathrm{Rang}(\Psi \circ \Phi) \leq \min\{\mathrm{Rang}(\Phi), \mathrm{Rang}(\Psi)\}$.

Abgabe der Lösungen bis zum 23.01.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.