Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (P)

Es sei $B := \{b_1, \ldots, b_5\}$ eine Basis eines reellen Vektorraums V und Φ ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{array}{rclrrrrr}
\Phi(b_1) & = & 4b_1 & +2b_2 & & -2b_4 & -3b_5 \\
\Phi(b_2) & = & & & -2b_3 & & +b_5 \\
\Phi(b_3) & = & & -4b_2 & +2b_3 & & -b_5 \\
\Phi(b_4) & = & -2b_1 & & +3b_3 & +b_4 & -b_5 \\
\Phi(b_5) & = & & 3b_2 & & & +2b_5 & .
\end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen von Φ und $\Phi \circ \Phi$ bezüglich B.

b) Ist Φ bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Zeigen Sie: Die Menge $C := \{c_1, c_2, c_3\}$, bestehend aus den Vektoren

$$c_1 := b_2 + b_3 + b_5, \qquad c_2 := -b_3 + b_5, \qquad c_3 := b_2 + b_5,$$

ist Basis eines Untervektorraums U von V mit $\Phi(U) \subset U$.

d) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix des Endomorphismus $\Phi|_U : U \to U$ (das ist die Einschränkung von Φ auf U) bezüglich C.

Aufgabe 2 (P)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $V = \mathrm{Kern}(\Phi) \oplus \mathrm{Bild}(\Phi)$.

ii) $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\Phi^2)$.

iii) $\mathrm{Bild}(\Phi) = \mathrm{Bild}(\Phi^2)$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot x\,.$$

Bestimmen Sie eine (geordnete) Basis B von $\mathbb{R}^4$ und eine (geordnete) Basis C von $\mathbb{R}^3$, so dass Ψ bezüglich der Basen B und C folgende Abbildungsmatrix hat:

$$M_C^B(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Abgabe der Lösungen bis zum 30.01.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.