

Aufgabenvorschläge für die Tutorien zur LA I (7. Woche)

Themen der Woche: Vektorräume, lineare (Un-)Abhängigkeit, lineare Hülle, Basen

Hinweis: Alle diese Aufgaben sind als Vorschläge gedacht! Es ist nicht das Ziel, möglichst viele Aufgaben anzuschreiben. Wichtiger sind das gemeinsame Erarbeiten und Diskutieren.

Aufgabe 1

Ist $V = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation, die gegeben sei durch $0 \cdot z := 0$ und $1 \cdot z := z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sind v_1, v_2 und v_3 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig?

Wie sieht es über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ aus?

Bestimmen Sie jeweils eine Basis der linearen Hülle.

Aufgabe 3

Fassen Sie $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum auf und beweisen Sie, dass die Elemente

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}$$

über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass

$$V = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 \text{ konvergiert}\}$$

mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation für Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

Wendet Euch mit Fragen und Anmerkungen bitte an Rafaela Rollin (rafaela.rollin@kit.edu) oder Moritz Gruber (moritz.gruber@kit.edu).