Aufgabenvorschläge für die Tutorien zur LA I (14. Woche)
30.1.17

Themen der Woche: Determinanten

Hinweis: Alle diese Aufgaben sind als Vorschläge gedacht! Es ist nicht das Ziel, möglichst viele Aufgaben anzuschreiben. Wichtiger sind das gemeinsame Erarbeiten und Diskutieren.

Aufgabe 1

Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}),$$

$$D = \begin{pmatrix} s & t & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}), \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die reelle $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } |i-j| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $d_n := \det(A_n)$.

a) Finden Sie eine Rekursionsformel für d_n.

b) Berechnen Sie d_n für $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

c) Verifizieren Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $d_{n+6} = d_n$.

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix gegeben:

$$V_n := \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung: V_n wird auch "Vandermonde Matrix" genannt.

Wendet Euch mit Fragen und Anmerkungen bitte an Rafaela Rollin (`rafaela.rollin@kit.edu`) oder Moritz Gruber (`moritz.gruber@kit.edu`).