

Lineare Algebra I

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 2

Abgabe bis spätestens zum 04.11.2024 um 15:30 Uhr

Aufgabe 1

(1) Beantworten Sie (ohne Beweis), ob die folgenden Gleichungssysteme linear sind:

$$(a) \begin{cases} x_1 + 9x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_3 + \sqrt{x_4} = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + 9x_3 = 7 \\ 9x_3 + 13x_4 = 9 \end{cases} \quad (c) \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$$

$$(d) \begin{cases} 2^5 x_1 + x_2 = 7 \\ 2^7 x_1 + 2^{x_2} \cdot 3 = 3 \\ 2^9 x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

(2) Schreiben Sie die folgende lineare Gleichungssysteme in Matrixform (oder umgekehrt):

$$(a) \begin{cases} x_1 + 9x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_2 + 9x_3 = x_4 \\ 9x_3 + 13x_4 = x_1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$(d) x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \quad (e) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(1) Schreiben Sie die folgende Mengen in Aussageform um (z.B. $\{2, 4, 6, \dots\} \rightarrow \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$):

$$A = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\} \quad B = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

$$D = \{100, 101, 102, 103, 104, \dots, 999, 1000\} \quad E = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), \dots\}$$

(2) Schreiben Sie die Matrizen auf, die durch die folgenden Aussagen definiert sind:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, \text{ wobei } a_{ij} = i - j;$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}, \text{ wobei } b_{ij} = 0 \text{ falls } i < j, \text{ sonst } b_{ij} = 1;$$

$$C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq 5}, \text{ wobei } c_{ij} = i \cdot j;$$

$$D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}, \text{ wobei } d_{ij} \in \{0, 1\} \text{ und } d_{ij} = 1 \text{ genau dann, wenn } i \text{ und } j \text{ durch eine Kante in Abbildung 1 verbunden sind.}$$

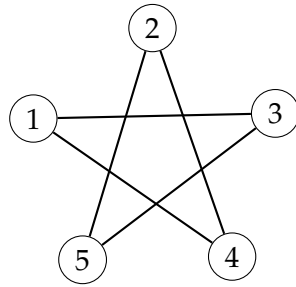


Abbildung 1: Der Graph für die Matrix D

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie ob die folgende zwei lineare Gleichungssysteme äquivalent sind:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 11 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

(Können Sie es tun, ohne die Gleichungssysteme zu lösen?)

Aufgabe 4

Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \{1, 2, 3, 4\}, \quad M_2 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\}, \quad M_3 := \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad M_4 := \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Bestimmen Sie $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_3 \cap M_4$, $M_1 \setminus M_3$, und $(M_4 \setminus M_2) \cup M_3$.

Abgabe der Lösungen bis zum 04.11.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrer Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.