

Lineare Algebra I
Wintersemester 2024/25
Übungsblatt 3
Abgabe bis spätestens zum 11.11.2024 um 15:30 Uhr
Aufgabe 1

Kreisen Sie die Pivots der folgenden Matrizen ein und entscheiden Sie (ohne Beweis), ob die jeweilige Matrix reduziert und normiert ist. Wenn eine Matrix nicht reduziert und normiert ist, verwenden Sie den Gauß-Algorithmus, um die reduzierte und normierte Form (i.e. rref) der Matrix abzuleiten.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 & & & & & = 1 \\ & 3x_3 + 4x_4 & & & & = 2 \\ & & 4x_4 + 5x_5 & & & = 3 \end{cases}$$

$$(b) \text{ das LGS mit der erweiterten Matrix } \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & m-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & m & 1 \end{array} \right)$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante. Verwenden Sie das Gauß-Verfahren, um die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \quad \quad 2x_2 - 13x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 14x_3 - 2x_4 = a \end{cases}$$

(Hint: Die Lösungsmenge sollte abhängig von a sein.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben seien zwei Teilmengen A und B von C . Zeigen Sie, dass für die Potenzmengen die folgenden Beziehungen gelten:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B),$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$

Abgabe der Lösungen bis zum 11.11.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrer Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen und vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.