Sheet 03

Aufgabe 1

Kreisen Sie die Pivots der folgenden Matrizen ein und entscheiden Sie (ohne Beweis), ob die jeweilige Matrix reduziert und normiert ist. Wenn eine Matrix nicht reduziert und normiert ist, verwenden Sie den Gauß-Algorithmus, um die reduzierte und normierte Form (i.e. rref) der Matrix abzuleiten.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad (e)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Nein, rref: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Nein, rref: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Nein, rref: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) Ja

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & = & 1 \\ & & & & 3x_3 & + & 4x_4 & & & = & 2 \\ & & & & & & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

(b) das LGS mit der erweiterten Matrix
$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 & m-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

(a) Wir lassen x_2 und x_5 die freien Variablen sein. Dann gelten

$$x_1 = 1-2x_2, \quad x_4 = \frac{3-5x_5}{4}, \quad x_3 = \frac{2-4x_4}{3} = \frac{5x_5-1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{\left(1-2x_2, x_2, \frac{5x_5-1}{3}, \frac{3-5x_5}{4}, x_5\right) \,\middle|\, x_2, x_5 \in \mathbb{R}\right\}$$

(b) Das LGS besteht aus $2m$ Variablen und m Gleichungen. Wir bezeichnen die Variablen als $x_1, \dots, x_{2m}$.
Wir beachten dass jede Gleichung eine freie Variable hat. Deshalb lassen wir x_{2k} mit $k \in [m]$ die freien Variablen sein. Dann gilt

$$\forall k \in [m].\ x_{2k-1} = (m-k+1) - kx_{2k}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{(x_1, \dots, x_{2m}) \,\middle|\, \forall k \in [m]: x_{2k} \in \mathbb{R},\ x_{2k-1} = m+k-1-kx_{2k}\right\}$$

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine gegebene Konstante. Verwenden Sie das Gauß-Verfahren, um die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - 13x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 14x_3 - 2x_4 = a \end{cases}$$

(Hint: Die Lösungsmenge sollte abhängig von a sein.)

Matrixform des LGS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 14 & -2 & a \end{array}\right)$$

Phase 1: Die Elemente unterhalb des Pivots bereinigen

$$\Big\Downarrow \; Z_2 := Z_2 - 2Z_1, \; Z_4 := Z_4 - 2Z_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 16 & -4 & a-2 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \; Z_3 := Z_3 + 2Z_2, \; Z_4 := Z_4 - 3Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & a+4 \end{array}\right)$$

$\Downarrow \; Z_4 := Z_4 + Z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$\Downarrow \; Z_2 := -1 \cdot Z_2 \; , \quad Z_3 := -\frac{1}{7} \cdot Z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Phase 2: Die Elemente über dem Pivot bereinigen

$\Downarrow \; Z_1 := Z_1 + Z_3 \; , \quad Z_2 := Z_2 + 3 Z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 12/7 & 12/7 \\ 0 & 1 & 0 & 36/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$\Downarrow \; Z_1 := Z_1 - Z_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -24/7 & -17/7 \\ 0 & 1 & 0 & 36/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow \quad a \neq 1 : \; L = \emptyset$

$\quad\quad\; a = 1 : \; L = \left\{ \left(\frac{24t-17}{7}, \frac{29-36t}{7}, \frac{5-5t}{7}, t \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Gegeben seien zwei Teilmengen A und B von C. Zeigen Sie, dass für die Potenzmengen die folgenden Beziehungen gelten:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$,

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(a)

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{X \mid X \subseteq A\} \cap \{X \mid X \subseteq B\}$$
$$= \{X \mid X \subseteq A, X \subseteq B\}$$
$$= \{X \mid X \subseteq A \cap B\}$$
$$= \mathcal{P}(A \cap B)$$

(b)

$\forall X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B): \quad X \subseteq A$ or $X \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\Rightarrow \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$