Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Maria Axenovich
M. Sc. Dingyuan Liu

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra I **Wintersemester 2024/25**

Übungsblatt 4 **Abgabe bis spätestens zum 18.11.2024 um 15:30 Uhr**

Aufgabe 1

Sei A eine endliche Menge und sei $|A|$ die Kardinalität von A, also die Anzahl der Elemente in A. Zeigen Sie durch Induktion, dass immer $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ gilt, wobei $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A ist.
(Können Sie das auch ohne Induktion beweisen?)

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

a) Auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei eine Relation $\sim$ gegeben durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1, 2)$.

b) Seien p, q, r Aussagen. Ist die Aussage

$$(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow (\neg p \wedge \neg r)) \wedge (p \vee r)$$

wahr, bestimmen Sie (mit Begründung) die Wahrheiten von p, q, r.

Aufgabe 3 *(10 Punkte)*

Es seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen einander äquivalent sind.

a) f ist injektiv.

b) Für alle $X, Y \subseteq A$ gilt: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

c) Für alle $X \subseteq Y \subseteq A$ gilt: $f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Mengen A, B und C sowie Abbildungen $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ und $h\colon A \to A$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen:

a) $g \circ f$ ist bijektiv $\Longrightarrow$ f und g sind bijektiv.

b) f ist injektiv und g ist surjektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ist surjektiv.

c) $h \circ h = \mathrm{id}_A \Longrightarrow h$ ist bijektiv.

Abgabe der Lösungen bis zum 18.11.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrers Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.