

Sheet 05

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in G$ gilt: $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$.

Bew. Seien $x, y \in G$ zwei beliebige Elemente in $(G, \circ)$ und seien $x^{-1}, y^{-1} \in G$ ihre Inversen, d.h.

$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = y \circ y^{-1} = y^{-1} \circ y = e$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x \circ y) \circ (y^{-1} \circ x^{-1}) &= x \circ (y \circ y^{-1}) \circ x^{-1} \\ &\quad \text{assoziativ} \\ &= x \circ e \circ x^{-1} \\ &\quad \text{weil } e \text{ das Neutrale ist} \\ &= x \circ x^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

Ebenso haben wir

$$\begin{aligned} (y^{-1} \circ x^{-1}) \circ (x \circ y) &= y^{-1} \circ (x^{-1} \circ x) \circ y \\ &= y^{-1} \circ e \circ y \\ &= y^{-1} \circ y \\ &= e \end{aligned}$$

$\Rightarrow y^{-1} \circ x^{-1}$ ist die Inverse von $x \circ y$



b) Finden Sie eine Gruppe $(G, \circ)$ und Elemente $x, y \in G$ sodass $(x \circ y)^{-1} \neq x^{-1} \circ y^{-1}$.

Gruppe 1: Symmetrische Gruppen, z.B. $(S_3, \circ)$ und

$$\pi_1, \pi_2 \in S_3 \text{ mit } \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3)$$

$$\Rightarrow \pi_1^{-1} = \pi_1, \pi_2^{-1} = \pi_2$$

$$\Rightarrow \pi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1} = \pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aber aus (a) folgt $(\pi_1 \circ \pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1} = \pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Gruppe 2 $(GL(K, n), \cdot)$ mit $n \geq 2$, wobei

$$GL(K, n) := \{\text{alle invertierbare Matrizen in } K^{n \times n}\}$$

z.B. $(GL(\mathbb{R}, 2), \cdot)$ und $A, B \in GL(\mathbb{R}, 2)$
mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{aber } (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Sind $f, f' \in G$ Elemente, die für alle $g \in G$ die Gleichungen

$$f \circ g = g \quad \text{und} \quad g \circ f' = g$$

erfüllen, zeigen Sie, dass $f = f'$ das neutrale Element der Gruppe G ist.

Bew. Sei $e \in G$ das neutrale Element von G .

$$\begin{aligned} f = e: \quad f &= f \circ e = f \circ (g \circ g^{-1}) \\ &= (f \circ g) \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f' = e: \quad f' &= e \circ f = (g^{-1} \circ g) \circ f' \\ &= g^{-1} \circ (g \circ f') \\ &= g^{-1} \circ g \\ &= e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = f' = e$$



Das heißt, ist $f \in G$ das linke (rechte) neutrale Element für alle $g \in G$, ist f dann das neutrale Element von G .

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

Bew. Annahme, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist.

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } p, q \text{ sind nicht gleichzeitig gerade}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2, \text{ also ist } p^2 \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow p \text{ ist gerade} \Rightarrow 4 \mid p^2 \Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2} \text{ ist gerade} \\ \Rightarrow q \text{ ist gerade} \quad \square$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{x + \sqrt{2} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

Bew.

Zu zeigen: 0. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist unter $+$ und $\cdot$ geschlossen

1. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ ist eine abelsche Gruppe

2. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

3. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

0. $\forall a = x_1 + \sqrt{2}y_1, b = x_2 + \sqrt{2}y_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$$a+b = (x_1+x_2) + \sqrt{2}(y_1+y_2) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$a \cdot b = x_1x_2 + \sqrt{2}x_1y_2 + \sqrt{2}y_1x_2 + 2y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 + 2y_1y_2) + \sqrt{2}(x_1y_2 + y_1x_2) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

1. Assoziativ & Kommutativ. trivial, da $+$ die gewöhnliche Addition

Neutral $\exists 0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, sodass $\forall a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$$a+0 = 0+a = a$$

Inverse $\forall a = x + \sqrt{2}y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\exists -a = (-x) + \sqrt{2}(-y) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$a+(-a) = (-a)+a = 0$$

2. Assoziativ & Kommutativ. trivial

Neutral $\exists 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, sodass $\forall a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Inverse $\forall a = x + \sqrt{2}y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$,

$$\exists b = \frac{x}{x^2 - 2y^2} + \sqrt{2} \frac{y}{2y^2 - x^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\} :$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a = \frac{x^2}{x^2 - 2y^2} + \frac{2y^2}{2y^2 - x^2} + \sqrt{2} \left(\frac{xy}{2y^2 - x^2} + \frac{xy}{x^2 - 2y^2} \right) \\ &= \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 - 2y^2} + \sqrt{2} \left(\frac{xy}{x^2 - 2y^2} - \frac{xy}{x^2 - 2y^2} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2y^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Bew. Fall 1: $x=0$

$$\Rightarrow y \neq 0, \text{ da } a \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2y^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Fall 2: $y=0$

$$\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x^2 - 2y^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Fall 3: $x, y \neq 0$

$$\Rightarrow x^2 = 2y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \left| \frac{x}{y} \right| \in \mathbb{Q} \quad \text{↯}$$

3. trivial



Aufgabe 3

Es sei die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gegeben. Weiter sei auf G die Verknüpfung $\star$ durch

$$a \star b := ab + a + b \quad \text{für } a, b \in G,$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ eine abelsche Gruppe ist.

Bew.

Assoziativ: $\forall a, b \in G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} (a \star b) \star c &= (ab + a + b) \star c = (ab + a + b)c + (ab + a + b) + c \\ &= abc + ab + ac + a + bc + b + c \\ &= a \star (b \star c) \end{aligned}$$

Kommutativ: $\forall a, b \in G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$a \star b = ab + a + b = ba + b + a = b \star a$$

Neutral $\exists e = 0 \in G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, sodass $\forall a \in G$:

$$e \star a = ea + e + a = 0 + 0 + a = a$$

Inverse: $\forall a \in G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\exists b = \frac{-a}{a+1} \in G$:

$$\begin{aligned} a \star b &= ab + a + b \\ &= \frac{-a^2}{a+1} + a + \frac{-a}{a+1} \\ &= \frac{-a(a+1)}{a+1} + a = 0 \end{aligned}$$



b) Lösen Sie in der Gruppe $(G, \star)$ die Gleichung: $3 \star x \star x = 15$.

Das inverse Element von 3 ist

$$\frac{-3}{3+1} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (-\frac{3}{4}) \star 3 \star x \star x = (-\frac{3}{4}) \star 15$$

$$\Rightarrow x \star x = \frac{-3}{4} 15 - \frac{3}{4} + 15 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 3$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ oder } -3$$

c) Ist $(\mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \star)$ eine Untergruppe von $(G, \star)$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Nein, denn es gibt kein inverses Element für 3

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Stellen Sie (ohne Beweis) die folgenden Permutationen durch Transpositionen dar und berechnen Sie jeweils die Fehlstandsanzahl:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (1, 3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3) \circ (2, 5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= (1, 3) \circ (2, 5) \circ (3, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= (1, 3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= (1, 3) \circ (3, 5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= (1, 3) \circ (3, 5) \circ (5, 7)
 \end{aligned}$$

Fehlstandzahl:

β_1 : Fehlstandspaare:

$$\{3, 1\}, \{3, 2\}, \{5, 4\}, \{5, 1\}, \{5, 2\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}$$

$\Rightarrow$ Fehlstandzahl: 7

β_2 : Fehlstandspaare:

$$\{3, 2\}, \{3, 1\}, \{2, 1\}, \{5, 4\}, \{5, 1\}, \{4, 1\}, \{7, 6\}, \{7, 1\}, \{6, 1\}$$

$\Rightarrow$ Fehlstandzahl: 9

b) Es sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Bestimmen Sie die von σ erzeugte Untergruppe von S_4 sowie $\sigma^n := \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ Faktoren}}$, wobei n das Geburtsjahr von Niels Henrik Abel ist.

$$\langle \sigma \rangle = \{ \sigma^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\sigma^0 = \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^1 = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^4 = \sigma^2 \circ \sigma^2 = \text{id}$$

$$\Rightarrow \sigma^n = \sigma^m \text{ mit } m \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ und } m \equiv n \pmod{4}$$

$$\Rightarrow \langle \sigma \rangle = \{ \text{id}, \sigma, \sigma^2, \sigma^3 \}$$

$$\sigma^{1802} = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$