

Lineare Algebra I

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 6

Abgabe bis spätestens zum 02.12.2024 um 15:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Ist A , beziehungsweise C , invertierbar? Was sind gegebenenfalls die Inversen?
- b) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist B , beziehungsweise D , invertierbar? Bestimmen Sie die Menge aller solchen (a, b, c) .

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und

$$T_n(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i > j\}$$

die Menge der oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

- a) $T_n(\mathbb{K})$ ist ein Ring mit Eins bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.
- b) Seien $A, B \in T_n(\mathbb{K})$ und $C = AB$. Zeigen Sie, dass $\forall k \in \{1, \dots, n\} : a_{kk}b_{kk} = c_{kk}$.
- c) Sei $1 \leq i < j \leq n$. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wobei B aus A durch die Zeilenoperation $\text{Zeile}_i := \text{Zeile}_i + d \cdot \text{Zeile}_j$ erhalten wird. Finden Sie eine Matrix $C \in T_n(\mathbb{K})$, sodass $B = C \cdot A$.

Aufgabe 3

- a) Für einen Ring R mit Eins wird die Teilmenge der bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente mit R^* notiert.
Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[x]^* = \mathbb{K}^*$ gilt.
- b) Gegeben sei die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^n a_i.$$

Stimmt es, dass $\forall A, B \in \mathbb{K}[x] : \Phi(A \cdot B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe der Lösungen bis zum 02.12.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrer Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.