

Lineare Algebra I

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 7

Abgabe bis spätestens zum 09.12.2024 um 15:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\mathbb{K}^n$ wird jetzt mit folgender Addition und Multiplikation verknüpft:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n & \cdot : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ \vdots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}^n$ bezüglich obiger Addition und Multiplikation genau dann ein Körper ist, wenn $n = 1$ gilt.

- b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = ax + by\}$ mit der Addition $+$ gegeben durch

$$(x, y, z) + (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

und der Skalarmultiplikation $\cdot$ gegeben durch

$$d \cdot (x, y, z) := (dx, dy, dz)$$

ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $F \subseteq \mathbb{K}$ ein Körper bezüglich der gleichen Verknüpfungen.

- Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}$ ein F -Vektorraum ist.
- Stimmt es immer, dass F ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist?
- Beweisen Sie, dass die Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ des $\mathbb{Q}$ -Vektorraums $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $\text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

- a) Zeigen Sie, dass $\text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ mit der Verknüpfung $+$: $\text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \times \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ gegeben durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{K}$$

und der Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ gegeben durch

$$(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{K}$$

ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.

b) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei eine Abbildung $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_a(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{falls } x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times 7}$ eine Matrix mit $n \geq 5$, deren reduzierte Normform die folgende ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \dots, \overline{\mathbf{a}}_7$ die Spaltenvektoren der Matrix A . Listen Sie alle 3-elementigen Teilmengen von $\{\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \dots, \overline{\mathbf{a}}_7\}$ auf, die linear unabhängig sind.

Abgabe der Lösungen bis zum 09.12.2024 um 15:30 Uhr auf **ILIAS im Abgabeportal Ihrer Tutoriumsgruppe** oder in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihrer Tutoriumsgruppe im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Tutoriumsnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit **maximal 10 Punkten** bewertet.