

Sheet 08

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Gegeben seien eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} | & | & | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ | & | & | & | & | & | & | \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \mathbb{Z}_2 \leftrightarrow \mathbb{Z}_1, \quad \mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}_3 + \mathbb{Z}_1, \quad \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4 - t\mathbb{Z}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2t & -2t & 0 & -t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \mathbb{Z}_2 \leftrightarrow \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 := \frac{1}{2}\mathbb{Z}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2t & -2t & 0 & -t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \begin{aligned} z_1 &:= z_1 - 2z_2, & z_3 &:= z_3 - t z_2, & z_4 &:= z_4 - (1-2t)z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2t & 1 & -t/2 & -t/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2t-2 & 0 & -1/2 & t-1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Case 1: $t=1$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1/2} & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

pivots

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, v_3\}$
und $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$

Case 2: $t \neq 1$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2-2t} & 1 & -t/2 & -t/2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2t-2} & \textcircled{0} & -1/2 & t-1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

pivots

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear unabhängig und $\{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{3x - x^5, 4x + x^3, 5x - x^5 - x^6\}$$

in $\mathbb{Q}[x]$ linear unabhängig ist.

Erweitern Sie diese Menge zu einer Basis von $\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leq 6\}$.

$$\lambda_1 (3x - x^5) + \lambda_2 (4x + x^3) + \lambda_3 (5x - x^5 - x^6) = 0$$

das Koeffizient für den Term x^6 muss 0 sein

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0$$

das Koeffizient für den Term x^3 muss 0 sein

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0$$

das Koeffizient für den Term x^5 (oder x) muss 0 sein

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow$

$\{3x - x^5, 4x + x^3, 5x - x^5 - x^6\}$ ist linear unabhängig

Diese Menge zu einer Basis erweitern:

1. Ansatz: Wir schreiben die gegebene Polynome als Komponentenvektoren bezüglich der Standardbasis und dann machen wir die Spaltenauswahl (oder Zeilenauswahl) wie in (a).

2. Ansatz: Mit derselben Argumentation können wir zeigen, dass $\{x, 3x - x^5, 4x + x^3, 5x - x^5 - x^6\}$ linear unabhängig ist. Dann beobachten wir, dass die gegebene Polynome die Terme der Potenz 0, 2, und 4 nicht enthalten. Deshalb haben wir dass $\{1, x, x^2, x^4, 3x - x^5, 4x + x^3, 5x - x^5 - x^6\}$ eine linear

unabhängige Teilmenge der Größe 7 ist

Da $\dim(\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg(f) \leq 6\}) = 7$, ist

$$\{1, x, x^2, x^4, 3x - x^5, 4x + x^3, 5x - x^5 - x^6\}$$

eine Basis.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

- a) $\mathbb{C}$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- b) $\mathbb{R}$ ist kein endlich erzeugter $\mathbb{Q}$ -Vektorraum.

Easy.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum sowie M_1 und M_2 Teilmengen von V . Zeigen Sie:

- a) $\text{Span}(M_1 \cap M_2) \subseteq \text{Span}(M_1) \cap \text{Span}(M_2)$.

Easy.

- b) $\text{Span}(M_1) \cup \text{Span}(M_2) \subseteq \text{Span}(M_1 \cup M_2)$.

Easy.

- c) In a) und b) gilt im Allgemeinen keine Gleichheit. (Geben Sie jeweils ein Beispiel.)

Gegenbeispiel zu ca): $V = \mathbb{R}^3$,

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Span}(M_1 \cap M_2) = \text{Span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \subsetneq \mathbb{R}^3$$

$$\text{Span}(M_1) \cap \text{Span}(M_2) = \mathbb{R}^3 \cap \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$$

Gegenbeispiel zu cb): $V = \mathbb{R}^3$,

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dann gilt $\text{Span}(M_1 \cup M_2) = \mathbb{R}^3$

aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Span}(M_1) \cup \text{Span}(M_2)$

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- a) Zeigen Sie, dass eine Menge $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ von Vektoren linear unabhängig (bzw. linear abhängig) bleibt, wenn man elementare Operationen auf $v_1, \dots, v_n$ ausführt.

Seien $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ und $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq V$ mit
 $w_i = v_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$
 $w_p = \alpha v_p + \beta v_q$ ($\alpha \neq 0, p \neq q$)

Nämlich wird $\{w_1, \dots, w_n\}$ aus $\{v_1, \dots, v_n\}$ durch eine elementare Operation erhalten.

Zu zeigen: $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$ linear unabhängig

$$\Rightarrow : \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\}} \lambda_i v_i + \alpha \lambda_p v_p + (\lambda_q + \beta \lambda_p) v_q$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\}$$

$$\alpha \lambda_p = 0 \Rightarrow \lambda_p = 0$$

$$(\lambda_q + \beta \lambda_p) = 0 \Rightarrow \lambda_q = 0$$

$$\Rightarrow \{w_1, \dots, w_n\} \text{ linear unabhängig}$$

$$\Leftarrow : \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\}} \lambda_i w_i + \lambda_p \cdot \frac{w_p - \beta v_q}{\alpha} + \lambda_q v_q$$

$$= \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\}} \lambda_i w_i + \frac{\lambda_p}{\alpha} \cdot w_p + \left(\lambda_q - \frac{\beta \lambda_p}{\alpha}\right) w_q$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\}$$

$$\frac{\lambda_p}{\alpha} = 0 \Rightarrow \lambda_p = 0$$

$$(\lambda_q - \frac{\beta \lambda_p}{\alpha}) = 0 \Rightarrow \lambda_q = 0$$

$$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \text{ linear unabhängig}$$

b) Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $B \subseteq V$ genau dann eine Basis ist, wenn B maximal linear unabhängig ist.

Def. $B \subseteq V$ ist eine Basis wenn 1. $\text{Span}(B) = V$
2. B linear unabhängig

$\Rightarrow$: Sei $B \subseteq V$ eine Basis. Dann ist B linear unabhängig.
 $\forall x \in V \setminus B$.

Da $V = \text{Span}(B)$, gilt

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \text{ mit } b_i \in B$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i - x = 0$$

$$\Rightarrow \{b_1, \dots, b_n, x\} \text{ linear abhängig}$$

$$\Rightarrow B \cup \{x\} \text{ linear abhängig, d.h. } B \text{ ist maximal linear unabhängig}$$

$\Leftarrow$: Sei $B \subseteq V$ maximal linear unabhängig

Es reicht zu zeigen: $\text{Span}(B) = V$

$\forall x \in V \setminus B$. $B \cup \{x\}$ linear abhängig

$$\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_n \in B, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_x \in \mathbb{K} \text{ nicht-trivial: nicht alle gleich 0}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \lambda_x x = 0$$

Da $\lambda_x \neq 0$ (sonst $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_x = 0$), gilt

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_x} b_i \Rightarrow x \in \text{Span}(B) \Rightarrow \text{Span}(B) = V$$