Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

16. September 2025

Klausur

Lineare Algebra II
Sommersemester 2025

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Fachrichtung:

Semester:

Zur Bearbeitung: Die Klausur dauert **120 Minuten**. Es sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die *Nummer der Aufgabe* sowie *Ihren Namen* und *Ihre Matrikelnummer* schreiben.

Führen Sie Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, benennen Sie diese möglichst genau. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin. **Erklären und begründen Sie alles, was Sie tun!**

Ausdrücke wie $\sin(17)$ oder $\frac{25^{17}}{42!}$ sind als Endergebnis akzeptabel.

Zur Auswertung: Für jede der sechs Aufgaben gibt es maximal 10 Punkte. Sie haben die Prüfung bestanden, wenn Sie mindestens 30 der 60 möglichen Punkte erreicht haben.

Punkte (Wird von den Prüfenden ausgefüllt!)								Σ	**Note**

A1	A2	A3	A4	A5	A6	
						$\Longleftarrow$ Bitte kreuzen Sie hier an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)

a) Sei $E \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ die Einheitsmatrix und $A \in \mathbb{C}^{10\times 10}$ eine Matrix mit den folgenden Eigenschaften:

- $\dim(\operatorname{Null}(A-3E)) = 4$,
- $\dim\left(\operatorname{Null}(A-3E)^2\right) = 8$,
- $\dim\left(\operatorname{Null}(A-3E)^3\right) = 9$,
- $\dim(\operatorname{Null}(A+5E)) = 1$.

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

b) Wir betrachten die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^{-1}BS$ die Jordansche Normalform von B ist.

Lösung:

a) Aus

$$\dim(\operatorname{Null}(A-3E)) \neq 0 \quad \text{und} \quad \dim(\operatorname{Null}(A+5E)) \neq 0$$

folgt, dass 3 und -5 Eigenwerte von A sind.
Des Weiteren haben wir

$$\dim\left(\operatorname{Null}(A-3E)^3\right) + \dim(\operatorname{Null}(A+5E)) = 9+1 = 10 = \dim\left(\mathbb{C}^{10}\right).$$

Mit dem Satz über die Hauptraumzerlegung erhalten wir daher

$$\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 3}\colon\ \dim\left(\operatorname{Null}(A-3E)^k\right) = 9.$$

Wir definieren

$$\forall k \in \mathbb{N}_0\colon\ \tau_k := \operatorname{Rang}(A-3E)^k.$$

Dann gilt wegen der Dimensionsformel

$$\tau_0 = 10, \quad \tau_1 = 6, \quad \tau_2 = 2 \quad \text{und} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 3}\colon\ \tau_k = 1.$$

Wir schreiben außerdem

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon\ \sigma_k := \tau_{k-1} - 2\tau_k + \tau_{k+1}.$$

Dann erhalten wir

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 3, \quad \sigma_3 = 1 \quad \text{und} \quad \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 4} \colon \sigma_k = 0.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass σ_k der Anzahl der $(k \times k)$-Jordankästchen zum Eigenwert 3 entspricht. Da es außerdem mindestens ein Jordankästchen zum Eigenwert -5 geben muss, ist die einzige Möglichkeit für die Jordansche Normalform J wie folgt gegeben:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Da B eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir die Eigenwerte direkt auf der Hauptdiagonale ablesen: 2 ist der einzige Eigenwert von B.
Wir haben

$$B - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (B-2E)^3 = 0$$

und damit

$$\operatorname{Null}(B-2E) = \operatorname{Span}\{e_1\}, \quad \operatorname{Null}(B-2E)^2 = \operatorname{Span}\{e_1, e_2\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Null}(B-2E)^3 = \mathbb{R}^3.$$

Dann gilt

$$\operatorname{Null}(B-2E)^3 = \operatorname{Null}(B-2E)^2 \oplus \operatorname{Span}\left\{b_1^2 := e_3\right\}$$

und wir berechnen

$$(B-2E)\, b_1^2 = (1,1,0).$$

Des Weiteren betrachten wir die Zerlegung

$$\operatorname{Null}(B-2E)^2 = \operatorname{Null}(B-2E) \oplus \operatorname{Span}\left\{(B-2E)\, b_1^2\right\}$$

und berechnen
$$(B-2E)^2\, b_1^2 = (4,0,0)\,.$$
Schließlich haben wir
$$\operatorname{Null}(B-2E) = \operatorname{Span}\left\{(B-2E)^2\, b_1^2\right\}.$$
Wir definieren die Matrix
$$S := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
und aus der Vorlesung folgt, dass $S^{-1}BS$ die Jordansche Normalform von B ist.

Aufgabe 2 (2+4+4 Punkte)

a) Geben Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung für euklidische Vektorräume an. Geben Sie auch an, wann in der Ungleichung Gleichheit gilt.

b) Sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung:

$$\forall x, y \in V\colon\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt auf V induzierte Norm bezeichnet.

Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\forall x, y \in V\colon\ |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Gleichheit in der Ungleichung gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

b) Seien $x, y \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

wobei im vierten Schritt die Cauchy-Schwarz Ungleichung eingegangen ist.
Durch Wurzelziehen erhalten wir schließlich

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

c) Wir betrachten die Bilinearform

$$G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ G(x, y) = \langle x, Ay\rangle,$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist symmetrisch. Außerdem haben wir $\det(A_1) = 1$ und $\det(A_2) = 3$. Aus dem Hauptminoren Kriterium erhalten wir daher, dass A positiv definit ist. Es folgt, dass G ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{G(x,x)} = F(x)$$

erhalten wir schließlich, dass F die von G induzierte Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist. Die Abbildung F ist also insbesondere eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (2+4+4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum.

a) Geben Sie die Definition der Orthogonalprojektion π_U von V auf U an.

b) Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\|\pi_U(v)\| \leq \|v\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt auf V induzierte Norm bezeichnet.

c) Der *Winkel* $\omega(v,U)$ zwischen einem Vektor $v \in V$ und dem Untervektorraum U ist als die eindeutige Zahl $\theta \in [0,\pi]$ definiert, sodass

$$\cos(\theta) = \frac{\|\pi_U(v)\|}{\|v\|}.$$

Sei $v_0 \in V$ mit $d(\{v_0\},U) = d\left(\{v_0\},U^\perp\right)$. Bestimmen Sie $\omega(v_0,U)$.

Lösung:

a) Jeder Vektor $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung

$$v = u_v + u_v^\perp$$

mit $u_v \in U$ und $u_v^\perp \in U^\perp$.

Die Orthogonalprojektion von V auf U ist dann die Abbildung

$$\pi_U : V \to U,\ \pi_U(v) = u_v.$$

b) Sei $v \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \|u_v + u_v^\perp\|^2 \\
&= \|u_v\|^2 + 2\langle u_v, u_v^\perp\rangle + \|u_v^\perp\|^2 \\
&= \|u_v\|^2 + \|u_v^\perp\|^2 \\
&\geq \|u_v\|^2 \\
&= \|\pi_U(v)\|^2,
\end{aligned}$$

wobei im dritten Schritt $u_v \perp u_v^\perp$ eingegangen ist.

Durch Wurzelziehen erhalten wir schließlich

$$\|\pi_U(v)\| \leq \|v\|.$$

c) Mit

$$d\left(\{v_0\},U\right) = d\left(\{v_0\},U^{\perp}\right)$$

folgt aus der Vorlesung

$$\|\pi_{U^{\perp}}(v_0)\| = \|\pi_U(v_0)\|.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\cos\left(\omega\left(v_0,U\right)\right) &= \frac{\|\pi_U(v_0)\|}{\|v_0\|} \\
&= \frac{\|\pi_U(v_0)\|}{\sqrt{\|\pi_U(v_0)\|^2 + \|\pi_{U^{\perp}}(v_0)\|^2}} \\
&= \frac{\|\pi_U(v_0)\|}{\sqrt{2\|\pi_U(v_0)\|^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Es folgt schließlich

$$\omega\left(v_0,U\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 4 (3+1+6 Punkte)

a) Sei $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A_0 := (A-E)^{-1}(A+E)$ orthogonal ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$(A-E)(A+E)^{-1} = (A+E)^{-1}(A-E).$$

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

orthogonal ist.

c) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\tilde{B}$ von B und eine Orthonormalbasis W von $\mathbb{R}^4$, sodass die Abbildungsmatrix des Endomorphimsmus

$$\varphi_B \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi_B(x) = Bx$$

bezüglich W durch $\tilde{B}$ gegeben ist.

Lösung:

a) Wir zeigen zunächst den Hinweis:

$$\begin{aligned}(A-E)(A+E)^{-1} &= (A-2E+E)\,(A+E)^{-1} \\ &= (A+E)\,(A+E)^{-1} - 2\,(A+E)^{-1} \\ &= (A+E)^{-1}\,(A+E) - 2\,(A+E)^{-1} \\ &= (A+E)^{-1}\,(A-E)\,.\end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}A_0^T &= \left((A-E)^{-1}(A+E)\right)^T \\ &= (A^T+E)(A^T-E)^{-1} \\ &= (A-E)\,(A+E)^{-1} \\ &= (A+E)^{-1}\,(A-E) \\ &= A_0^{-1}.\end{aligned}$$

Es folgt, dass A_0 orthogonal ist.

b) Die Spalten von B bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$: Sie sind paarweise orthogonal zueinander und haben jeweils eine Norm von 1. Aus der Vorlesung wissen wir, dass B daher eine orthogonale Matrix ist.

c) Wir haben

$$A + A^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Da $A + A^T$ eine Diagonalmatrix ist, können wir die Eigenwerte direkt auf der Hauptdiagonale ablesen: $\sqrt{2}$ ist der einzige Eigenwert von $A + A^T$. Der zugehörige Eigenraum ist dann durch

$$E_{\sqrt{2}} = \operatorname{Span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

gegeben.
Wir setzen $w_1 := e_1$ und wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf $\{w_1, Aw_1\}$ an:
Dazu berechnen wir

$$Aw_1 - \langle Aw_1, w_1 \rangle w_1 = (1,0,0,1) - 1 \cdot e_1 = e_4 =: w_2$$

und bemerken, dass

$$\|w_1\| = \|w_2\| = 1.$$

Als nächstes wählen wir $w_3 := e_2 \in \operatorname{Span}\{w_1, w_2\}^{\perp} \cap E_{\sqrt{2}}$ und wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf $\{w_3, Aw_3\}$ an:
Wir berechnen

$$Aw_3 - \langle Aw_3, w_3 \rangle w_3 = (0,1,1,0) - 1 \cdot e_2 = e_3 =: w_4$$

und bemerken,dass

$$\|w_3\| = \|w_4\| = 1.$$

Schließlich definieren wir die Orthonormalbasis $W := \{w_1, \ldots, w_4\}$ von $\mathbb{R}^4$ und berechnen

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus der Vorlesung folgt dann

$$\tilde{B} = M_W^W(\varphi_B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (1+2+1+6 Punkte)
Wir betrachten die folgende quadratische Funktion:

$$\begin{aligned} &Q\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \\ &Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

a) Sei β die symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$, deren quadratische Form durch Q gegeben ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von β bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie die Signatur von β.

c) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von Q auf der Menge $S := \left\{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x\| = 1\right\}$.

d) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis B von $\mathbb{R}^4$, sodass die darstellende Matrix von β bezüglich B eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen in $\{1,-1,0\}$ ist.

Lösung:

a) Wir schreiben E für die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Die gesuchte darstellende Matrix können wir direkt ablesen:

$$J_E(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Das charakteristische Polynom von $J_E(\beta)$ ist durch

$$(x-1)^3(x+2)$$

gegeben. Daher sind die Eigenwerte 1 und -2. Die algebraische Vielfachheit von 1 beträgt 3 und die von -2 beträgt 1. Da 1 positiv und -2 negativ ist, ist die Signatur von β durch

$$(3,1,0)$$

gegeben.

c) Aus b) wissen wir bereits, dass 1 der größte und -2 der kleinste Eigenwert von $J_E(\beta)$ ist. Aus der Vorlesung folgt daher direkt

$$\max_{x\in S} Q(x) = 1 \quad \text{und} \quad \min_{x\in S} Q(x) = -2.$$

d) Wir betrachten die Eigenräume von $J_E(\beta)$:

$$E_1 = \mathrm{Span}\{a_1 := e_4, a_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0), a_3 := (1,-1,0,0)$$

Dann ist $\{a_1, a_2\}$ bereits orthonormal.
Wir berechnen

$$a_3 - \langle a_3, a_2\rangle a_2 - \langle a_3, a_1\rangle a_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

und

$$\left\| \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Des Weiteren setzen wir

$$a_3 := \frac{2}{\sqrt{6}}\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Aus dem Gram-Schmidt Verfahren folgt, dass $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Orthonormalbasis von E_1 ist.
Außerdem haben wir

$$E_{-2} = \mathrm{Span}\left\{a_4 := \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1,0)\right\}$$

und erhalten direkt, dass $\{a_4\}$ eine Orthonormalbasis von E_{-2} ist.
Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned}
b_1 &:= \frac{a_1}{\sqrt{|1|}} = a_1, \\
b_2 &:= \frac{a_2}{\sqrt{|1|}} = a_2, \\
b_3 &:= \frac{a_3}{\sqrt{|1|}} = a_3, \\
b_4 &:= \frac{a_4}{\sqrt{|-2|}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,1,0).
\end{aligned}$$

Mit der Vorlesung folgt dann, dass $B := \{b_1, \ldots, b_4\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^4$ ist, sodass

$$J_B(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (4+4+1+1 Punkte)
Sei f eine Bewegung (auch euklidische Isometrie genannt) von $\mathbb{E}\left(\mathbb{R}^3\right)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $f(0,2,1) = (1,-1,0)$,
- $f(0,1,1) = (0,-1,0)$,
- $f(1,1,1) = (0,0,0)$,
- $f(0,1,2) = (0,-1,1)$.

a) Bestimmen Sie $f(0,0,0)$.

b) Sei φ der lineare Anteil der affinen Abbildung f. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

c) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Geben Sie die Definition einer Affinität von $\mathbb{A}(V)$ an.

d) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$f_t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_t(x_1,x_2) = (1 + x_2 + tx_1, \pi - x_1 + tx_2)$$

eine Affinität von $\mathbb{A}^2$ ist.

Lösung:
a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine lineare Isometrie von $\mathbb{R}^3$ existiert, sodass

$$f = f(0) + \varphi.$$

Es gilt

$$0 = \underbrace{(0,2,1)}_{=:b_1} + \underbrace{(0,1,2)}_{=:b_2} - 3\underbrace{(0,1,1)}_{=:b_3}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(b_1 + b_2 - 3b_3) \\
&= f(0) + \varphi(b_1 + b_2 - 3b_3) \\
&= f(0) + \varphi(b_1) + \varphi(b_2) - 3\varphi(b_3) \\
&= f(0) + \varphi(b_1) + f(0) + \varphi(b_2) - 3(f(0) + \varphi(b_3)) + 2f(0) \\
&= f(b_1) + f(b_2) - 3f(b_3) + 2f(0).
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} f(0) &= 3f(b_3) - f(b_1) - f(b_2) \\ &= 3(0,-1,0) - (1,-1,0) - (0,-1,1) \\ &= (-1,-1,-1). \end{aligned}$$

b) Wir definieren

$$\begin{aligned} a_1 &:= b_1, \\ a_2 &:= b_3, \\ a_3 &:= (1,1,1). \end{aligned}$$

Dann ist $A := \{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und wir haben

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= f(0,2,1) - f(0) = (2,0,1), \\ \varphi(a_2) &= f(0,1,1) - f(0) = (1,0,1), \\ \varphi(a_3) &= f(1,1,1) - f(0) = (1,1,1). \end{aligned}$$

Es folgt

$$M_E^A(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} e_1 &= a_3 - a_2, \\ e_2 &= a_1 - a_2, \\ e_3 &= 2a_2 - a_1, \end{aligned}$$

womit wir

$$M_A^E(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten. Insgesamt ergibt sich

$$M_E^E(\varphi) = M_E^A(\varphi) \cdot M_A^E(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Eine Affinität von $\mathbb{A}(V)$ ist eine bijektive affine Abbildung $f\colon V \to V$.

d) Sei $t \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\forall x \in \mathbb{R}^2\colon\ f_t(x) = (1,\pi) + \underbrace{\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}}_{=:A} x.$$

Damit ist f_t affin mit linearem Anteil φ_A. Des Weiteren haben wir

$$\det(A) = t^2 + 1 \neq 0,$$

woraus folgt, dass φ_A und damit auch f_t bijektiv ist.
Die Abbildung f_t ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Affinität.