FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass D zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist. Ist diese kommutativ?

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $A \in D$ mit der Eigenschaft

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad \text{für alle } B \in D,$$

die man auch das *Zentrum* von D nennt.

Aufgabe 2.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_n := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 + t^2, & i = j, \\ t, & |i - j| = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $1 \leq i, j \leq n$. Berechnen Sie $\det A_n$.

Aufgabe 3.
In Abhängigkeit vom reellen Parameter t sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist, und geben Sie für alle diese t jeweils eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, für die die Matrix $S^{-1}A_tS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Seien V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, Φ ein Endomorphismus von V und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ zwei verschiedene Eigenwerte von Φ mit den zugehörigen Eigenräumen E_λ bzw. E_μ. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Kern}((\Phi - \lambda \mathrm{id}) \circ (\Phi - \mu \mathrm{id})) = E_\lambda + E_\mu \, .$$

Abgabe bis Donnerstag, den 21. April 2011, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten Ihres Tutoriums im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, Ihrer **Fachrichtung** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.
Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.