FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

2. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Berechnen Sie für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die Matrix $B := A^{11} - 3A^{10} - A^3 + 3A^2 + A$ mit Hilfe des Satzes von Cayley–Hamilton.

Aufgabe 2.
Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, $m \in \mathbb{K}[X]$ ihr Minimalpolynom und $q \in \mathbb{K}[X]$ ein beliebiges Polynom.

(a) Zeigen Sie, dass $q(A)$ genau dann regulär ist, wenn m und q teilerfremd sind.

(b) Es seien nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $q = X^{10} - 8X^8 + 21X^6 - 19X^4 - 6X^2 + 9$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $q(A)$ regulär ist und dass $(q(A))^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - I_4$ gilt. Dabei bezeichnet $I_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Einheitsmatrix.

Aufgabe 3.
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ t+s & 2t-s & s & t+s \\ -1 & 1 & 0 & -1-s \end{pmatrix} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass A^2 und A^4 genau dann dieselben Eigenwerte besitzen, wenn $s \in \{-1, 0, 1\}$.

Aufgabe 4. (ohne Abgabe, ohne Korrektur)
Gegeben sei die reelle 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A zwei verschiedene reelle Eigenwerte τ und $1-\tau$ hat, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume E_τ und $E_{1-\tau}$.

(b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren von A dar.

(c) Berechnen Sie für $n \geq 1$ den Eintrag a_n der n-ten Potenz

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis Donnerstag, den 28. April 2011, 12.00 Uhr, durch Einwurf in den gelben Kasten Ihres Tutoriums im Zähringerhaus (Geb. 01.85) neben dem Seminarraum Z2. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, Ihrer **Fachrichtung** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.
Die Lösungen sind selbständig zu formulieren und in handschriftlicher Form (keine Kopie, kein Computerausdruck) einzureichen.