Lösung zu Aufgabe 1 (3. Übungsblatt)

Das charakteristische Polynom von A_a ist

$$p_a = \det(A_a - XI_5) = (a-X)^3(2-X)^2\,.$$

Die Eigenwerte von A_a sind also $c_1 = a$ und $c_2 = 2$. Wir werden die Fälle $c_1 = c_2$ (d.h. $a = 2$) und $c_1 \neq c_2$ (d.h. $a \neq 2$) getrennt untersuchen. Zunächst notieren wir aber noch, dass für beliebige $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$(A_a - aI_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Somit folgt $\operatorname{Rang}(A_a - aI_5) = 3$ (und $H_a \neq E_a$). Außerdem gilt

$$(A_a - aI_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2-a)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8-2a & 0 & 0 & 4-2a \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2-a & 9-4a & 0 & 0 & (2-a)^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{Rang}(A_a - aI_5)^2 = 2$.

<u>1. Fall ($a = 2$):</u> Es ist $c_1 = c_2$ und $p_a = (2-X)^5$, also $\dim H_2 = 5$, d.h., $H_2 = \mathbb{R}^5$. Es bleibt nur noch das Minimalpolynom zu bestimmen, das von der Form $m_a = (2-X)^s$ ist mit $1 \leq s \leq 5$. Der Index s ist in diesem Fall die kleinste Zahl, so dass $(A_a - aI_5)^s = 0$ gilt. Von oben lesen wir ab, dass $(A_a - aI_5)^2 \neq 0$ gilt. Genauer ist

$$(A_a - aI_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A_a - aI_5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A_a - aI_5)^4 = 0 = (A_a - aI_5)^5\,.$$

Der Index von H_a ist also $s = 4$ und $m_a = (X-2)^4$ ist das Minimalpolynom.

<u>2. Fall ($a \neq 2$):</u> Es ist $\dim H_a = 3$ und $\dim H_2 = 2$. Wegen $\operatorname{Rang}(A_a - aI_5)^2 = 2$ gilt $H_a = \operatorname{Kern}(A_a - aI_5)^2$ und der Index von H_a ist 2. Außerdem lesen wir oben ab:

$$H_a = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Nun behandeln wir noch den Eigenwert $c_2 = 2$. Wegen

$$A_a - 2I_5 = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(a-2)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 & \frac{2}{a-2} \\ 0 & 0 & 0 & 2a-5 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt
$$\operatorname{Rang}(A_a - 2I_5) = \begin{cases} 3, & \text{falls } a = \frac{5}{2} \\ 4, & \text{falls } a \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$
Für $a = \frac{5}{2}$ ist $\dim E_2 = 2 = \dim H_2$, der Index von H_2 ist also 1 und wegen
$$A_a - 2I_5 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \text{ ist } H_2 = E_2 = [\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}].$$
Das Minimalpolynom lautet dann $m_a = (X-a)^2(X-2)$.

Für $a \neq \frac{5}{2}$ dagegen ist $\dim E_2 = 1 < 2 = \dim H_2$, weshalb nur der Index 2 für H_2 bleibt. Für $a \notin \{2, \frac{5}{2}\}$ ist das Minimalpolynom also $m_a = (X-a)^2(X-2)^2$. Wir bestimmen noch H_2 in diesem Fall:
$$(A_a - 2I_5)^2 = \begin{pmatrix} (a-2)^2 & a-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & (a-2)^2 & 0 & 2(a-2) \\ 4(a-2) & 2 & 0 & (a-2)^2 & 0 \\ a-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{(a-2)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a^2-2a-1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{pmatrix},$$
woraus sich
$$H_2 = [\begin{pmatrix} (a-2)^2 \\ -(a-2)^3 \\ 2(a^2-2a-1) \\ -2(a-2) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix}]$$
ergibt.

Anmerkung: Aus den bestimmten Größen läßt sich in allen Fällen direkt die Jordansche Normalform J_a von A_a ablesen:
$$J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, J_{\frac{5}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } J_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ für } a \notin \{2, \frac{5}{2}\}.$$