Lösung zu Aufgabe 3 (5. Übungsblatt)

(a) A ist offenbar symmetrisch und außerdem positiv definit, denn die Hauptunterdeterminanten sind alle positiv: $\det A_1 = 13$, $\det A_2 = 126$, $\det A_3 = 126 \cdot 9$ und $\det A = 9 \cdot 1458$.

(b) Man kann das Gram-Schmidt-Verfahren direkt auf die erzeugenden Vektoren von U anwenden. Wir bestimmen aber zunächst eine Basis von U und wenden das Verfahren auf diese an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\dim U = 3$ und eine Basis von U ist z.B. gegeben durch

$$x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf diese Basis:

$$\begin{aligned} y_1 &:= x_1 \\ \|y_1\|^2 &= \langle y_1, y_1 \rangle = y_1^\top A y_1 = 49 \\ y_2 &:= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \|y_2\|^2 &= 9 \\ y_3 &:= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \|y_3\|^2 &= 18 \end{aligned}$$

Eine ONB von U ist somit z.B. gegeben durch

$$\left(\frac{y_1}{\|y_1\|}, \frac{y_2}{\|y_2\|}, \frac{y_3}{\|y_3\|}\right) = \left(\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{21\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$