Lösung zu Aufgabe 1 (6. Übungsblatt)

Die erzeugenden Vektoren von U seien (in dieser Reihenfolge) mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet. Direkte Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf diese Vektoren ergibt:

$$y_1 := x_1, \quad \|y_1\|^2 = 9 \qquad \Longrightarrow b_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_2 := x_2 - \frac{\langle x_2, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{9}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|y_2\|^2 = 7 \qquad \Longrightarrow b_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-14}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \|y_3\|^2 = 3 \qquad \Longrightarrow b_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_4 := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{27}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-7}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist (b_1, b_2, b_3) eine ONB von U.

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2 + \langle x, b_3\rangle b_3 \\ &= \frac{6}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-4}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-3}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 61 \\ 9 \\ 10 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$x - \pi(x) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 32 \\ -54 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad d(x, U) = \|x - \pi(x)\| = \frac{2}{7}\sqrt{119}.$$

Lösung zu Aufgabe 3 (6. Übungsblatt)

(a)
- Linearität: Für alle $p_1, p_2, q \in V$ und $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle d_1p_1 + d_2p_2, q\rangle = d_1 \cdot \langle p_1, q\rangle + d_2 \cdot \langle p_2, q\rangle$$

denn das Ableiten ist linear, d.h., $(d_1p_1 + d_2p_2)' = d_1p_1' + d_2p_2'$.

- Symmetrie: Für alle $p, q \in V$ gilt

$$\langle p, q\rangle = p(a)q(a) + p'(b)q'(b) + p''(c)q''(c) = \langle q, p\rangle$$

(wegen der Kommutativität von Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$).

- positive Definitheit: Für jedes $p \in V$ ist $\langle p, p\rangle = p(a)^2 + p'(b)^2 + p''(c)^2 \geq 0$ (Summe von Quadratzahlen). Außerdem ist $\langle p, p\rangle = 0$ genau dann, wenn $p(a) = p'(b) = p''(c) = 0$ gilt. Schreibt man $p = a_0 + a_1X + a_2X^2$, so ist $p' = a_1 + 2a_2X$ und $p'' = 2a_2$. Wegen $p(a) = p'(b) = p''(c) = 0$ folgt nun:

$0 = p''(c) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = 0$
$0 = p'(b) = a_1 + 0 \cdot b = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$
$0 = p(a) = 2a_0 + 0 \cdot a + 0 \cdot a^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

Also gilt $p = 0$.

(b) $(1, X, X^2)$ ist (bekanntlich) eine Basis von V, aus der wir nun nach dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB bestimmen:

- $q_1 := 1$
$\|q_1\|^2 = \langle q_1, q_1\rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$
- $\langle X, q_1\rangle = a \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a$
$q_2 := X - \frac{\langle X,q_1\rangle}{\langle q_1,q_1\rangle} \cdot q_1 = X - \frac{a}{1} \cdot 1 = X - a$
$\|q_2\|^2 = \langle q_2, q_2\rangle = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$
- $\langle X^2, q_1\rangle = a^2 \cdot 1 + 2b \cdot 0 + 2 \cdot 0 = a^2$
$\langle X^2, q_2\rangle = a^2 \cdot 0 + 2b \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2b$
$q_3 := X^2 - \frac{\langle X^2,q_1\rangle}{\langle q_1,q_1\rangle} \cdot q_1 - \frac{\langle X^2,q_2\rangle}{\langle q_2,q_2\rangle} \cdot q_2 = X^2 - \frac{a^2}{1} \cdot 1 - \frac{2b}{1} \cdot (X - a) = X^2 - 2bX + 2ab - a^2$
$\|q_3\|^2 = \langle q_3, q_3\rangle = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4$

Somit ist $(1, X - a, \frac{1}{2} \cdot (X^2 - 2bX + 2ab - a^2))$ eine ONB von V bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(c) Aus (b) sieht man, dass $(1, X - a)$ eine ONB von U ist. Wegen

$$\begin{aligned}\pi(X^2 + 1) &= \langle X^2 + 1, 1\rangle \cdot 1 + \langle X^2 + 1, X - a\rangle \cdot (X - a)\\ &= ((a^2 + 1) \cdot 1 + 2b \cdot 0 + 2 \cdot 0) \cdot 1 + ((a^2 + 1) \cdot 0 + 2b \cdot 1 + 2 \cdot 0) \cdot (X - a)\\ &= 2bX + (a^2 - 2ab + 1)\end{aligned}$$

folgt

$$d(X^2 + 1, U)^2 = \|X^2 + 1 - \pi(X^2 + 1)\|^2 = \|X^2 - 2bX - a^2 + 2ab\|^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4\,,$$

also $d(X^2 + 1, U) = 2$.