Lösung zu Aufgabe 1 (8. Übungsblatt)

(a) Wir betrachten die Hilfsabbildung $\Phi + \Phi^*$. Da A als Abbildungsmatrix von Φ bzgl. der ONB B orthogonal ist, hat $\Phi + \Phi^*$ (bzgl. B) die symm. und diagonalisierbare Abbildungsmatrix

$$M := A + A^\top = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte von $\Phi + \Phi^*$ berechnen wir das char. Polynom:

$$p = \det(M - XE_4) = \det(\frac{1}{5}(5M - 5XE_4)) = \frac{1}{5^4}\begin{vmatrix} 3-5X & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3-5X & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 3-5X & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3-5X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)^2(1+X)^2$$

Die Eigenwerte von M sind also $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$ (jeweils mit Vielfachheit 2). Die Normalform $\tilde{A}$ von Φ besteht somit aus zwei Drehkästchen und die Winkel sind bestimmt durch $\cos\omega_1 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2}$ und $\cos\omega_2 = -\frac{1}{2}$, d.h., $\omega_1 = \frac{\pi}{3}$ und $\omega_2 = \frac{2\pi}{3}$. Als Normalform von Φ ergibt sich die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 & 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zunächst bestimmen wir eine passende ONB (b_1, b_2) in $E_1 = \mathrm{Kern}(\Phi + \Phi^* - id)$. Dazu wählen wir einen beliebigen (normierten) Vektor b_1 (mit Koordinatenvektor $\hat{b}_1$ bzgl. B) aus E_1, indem wir $\hat{b}_1$ normiert aus $\mathrm{Kern}(M - E_4)$ wählen:

$$(M - E_4)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} x = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

also z.B:

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Dann ist $\hat{b}_2$ (Koordinatenvektor von b_2) bestimmt durch:

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{\sin\omega_1}\left(A\hat{b}_1 - \cos\omega_1\hat{b}_1\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{10\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 10 \\ 5\sqrt{3} \\ -10\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog bestimmt man in $E_{-1} = \mathrm{Kern}(\Phi + \Phi^* + id)$ ein ONB (b_3, b_4), z.B. durch

$$\hat{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \hat{b}_4 = \frac{1}{\sin\omega_2}(A\hat{b}_3 - \cos\omega_2\hat{b}_3) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine ONB $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ in V, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\tilde{A}$ hat, ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + x_4) \\
b_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2 - 2x_3) \\
b_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2x_4) \\
b_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_2 + x_3).
\end{aligned}$$

(c) Die gesuchte orthogonale Matrix S erfüllt $\tilde{A} = S^\top AS$. S ist also gerade die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von B nach $\tilde{B}$, d.h. $S = (\hat{b}_1|\hat{b}_2|\hat{b}_3|\hat{b}_4)$.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (8. Übungsblatt)

Sei U die Drehebene von Φ. Dann ist $U^\perp$ die Drehachse.

Für beliebige $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\Phi(x) - x \in U$

(für $x \in U^\perp$: $\Phi(x) = x$, d.h. $\Phi(x) - x = 0 \in U$, für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus U^\perp$ liegen x und $\Phi(x)$ in einer zu U parallelen affinen Ebene)

$\Rightarrow$ für $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\Phi(y) - y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(z) - z = \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$$

Da diese beiden Vektoren lin. unabh. sind, erzeugen sie U ($\dim U = 2$),

d.h. $U = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ ist die Drehebene von Φ

Die Drehachse ist damit gegeben durch

$$U^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

und mit $v := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist (v) eine ONB von $U^\perp$.

Für den Drehwinkel ω gilt: $\omega = \sphericalangle(u, \Phi(u))$ für ein bel. $u \in U \setminus \{0\}$

$$\text{d.h. } \cos\omega = \frac{\langle u, \Phi(u) \rangle}{\|u\| \cdot \|\Phi(u)\|} = \frac{\langle u, \Phi(u) \rangle}{\|u\|^2} \quad (\text{da } \Phi \text{ Isometrie})$$

Sei π die OP auf U und π' die OP auf $U^\perp$. Für $x \in \mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ gilt dann $x = \pi(x) + \pi'(x)$ mit $\pi'(x) = \langle x, v \rangle \cdot v$.

$$\Rightarrow \pi(x) = x - \langle x, v \rangle \cdot v$$

Wählen zur Bestimmung von ω $u = \pi(y)$

$$\Rightarrow u = y - \langle y, v \rangle \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(u) = \Phi(\pi(y)) = \pi(\Phi(y)) = \pi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos\omega = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{3}$$

Die Normalform von Φ ist damit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Eine ONB $B = (x_1, x_2, x_3)$, bzgl. der Φ die Abb.matrix $\tilde{A}$ hat, ist gegeben durch

$$x_1 = v = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$ (bel. aus U gewählt und normiert)

hier: $x_2 = \frac{\pi(y)}{\|\pi(y)\|}$, dann $\Phi(x_2)$ schon bestimmt (s.o.)

und

$$x_3 = \frac{1}{\sin\omega}\left(\Phi(x_2) - \cos\omega\, x_2\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3 (8. Übungsblatt)

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\langle (\Phi^* \circ \Phi)(x), y\rangle = \langle \Phi(x), (\Phi^*)^*(y)\rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, (\Phi^* \circ \Phi)(y)\rangle.$$

Also ist $\Phi^* \circ \Phi$ selbstadjungiert. Für $\Phi \circ \Phi^*$ analog.

Mit den Rechenregeln in Bem. (e) auf S.250 im Skript kann man auch direkt schließen: $(\Phi^* \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Phi^{**} = \Phi^* \circ \Phi$ und $(\Phi \circ \Phi^*)^* = \Phi^{**} \circ \Phi^* = \Phi \circ \Phi^*$.

Sei c EW von $\Phi^* \circ \Phi \Rightarrow \exists x \in V \setminus \{0\} : \Phi^* \circ \Phi(x) = cx$,

$$\Rightarrow \quad c \underbrace{\langle x, x\rangle}_{>0} = \langle cx, x\rangle = \langle \Phi^* \circ \Phi(x), x\rangle = \underbrace{\langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle}_{>0, \text{ da } \Phi(x) \neq 0} \quad \Rightarrow c > 0.$$

Analog für $\Phi \circ \Phi^*$, da Φ^* auch bijektiv ist.

(b) Sei c EW von $\Phi^* \circ \Phi$. $\Rightarrow \exists x \in V \setminus \{0\} : \Phi^* \circ \Phi(x) = cx$
$\Rightarrow \Phi \circ \Phi^*(\Phi(x)) = c\Phi(x)$ und $\Phi(x) \neq 0$
$\Rightarrow c$ EW von $\Phi \circ \Phi^*$. Umkehrung analog.

(c) $\Phi \circ \Phi^*$ selbstadjungiert $\Rightarrow \exists$ ONB $(x_1, \ldots, x_n)$ von V aus EV von $\Phi \circ \Phi^*$, d.h., $(\Phi \circ \Phi^*)(x_i) = c_i x_i, i = 1, \ldots, n$, wobei die c_i die zugehörigen (nicht notwendig verschiedenen) EW sind.

Da $\Phi^* \circ \Phi$ selbstadjungiert ist und dieselben EW $c_1, \ldots, c_n$ besitzt wie $\Phi \circ \Phi^*$, gibt es eine ONB $(y_1, \ldots, y_n)$ von V mit $(\Phi^* \circ \Phi)(y_i) = c_i y_i, i = 1, \ldots, n$.

Durch

$$\Psi(x_i) := y_i, i = 1, \ldots, n$$

wird eine Isometrie von V definiert (überführt ONB in ONB), und es gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$\Phi^* \circ \Phi(\Psi(x_i)) = \Phi^* \circ \Phi(y_i) = c_i y_i = c_i \Psi(x_i),$$

also

$$\Psi^{-1} \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi(x_i) = c_i x_i = \Phi \circ \Phi^*(x_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\Rightarrow \Phi \circ \Phi^* = \underbrace{\Psi^{-1}}_{=\Psi^*} \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi = \Psi^* \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi.$$