Lösung zu Aufgabe 1 (9. Übungsblatt)

(a) Sei Φ selbstadjungiert. Dann ist Φ normal. Sei c EW von Φ. Dann gibt es ein $x \neq 0$ mit $\Phi(x) = cx$ und es gilt

$$c\langle x, x\rangle = \langle cx, x\rangle = \langle \Phi(x), x\rangle = \langle x, \Phi(x)\rangle = \langle x, cx\rangle = \bar{c}\langle x, x\rangle,$$

also $c = \bar{c}$ und somit $c \in \mathbb{R}$. Sei umgekehrt Φ normal und alle EW von Φ seien reell. Dann existiert eine ONB $B = (x_1, \dots, x_n)$ aus EV von Φ, d.h., mit $\Phi(x_i) = c_i x_i$, $i = 1, \dots, n$, $c_i \in \mathbb{R}$. Bezüglich B hat Φ die Abbildungsmatrix

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Es gilt $A_\Phi = \bar{A}_\Phi^\top$, also ist A hermitesch und Φ somit selbstadjungiert.

(b) Sei Φ antiselbstadjungiert. Dann ist Φ normal und analog zu (a) findet man $c = -\bar{c}$ für jeden EW c von Φ. Also gilt $c = ib, b \in \mathbb{R}$.

Sei umgekehrt Φ normal und alle EW seien von der Form $ib, b \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine ONB B aus EV von Φ, so dass A_Φ bzgl. B die Gestalt

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} ib_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & ib_n \end{pmatrix}, b_i \in \mathbb{R},$$

hat. Da $\bar{A}_\Phi^\top = -A_\Phi$ gilt, ist A_Φ schiefsymmetrisch und somit Φ antiselbstadjungiert.

(c) Sei Φ Isometrie. Dann ist Φ normal. Für jeden EW c von Φ gibt es ein $x \neq 0$ mit $\Phi(x) = cx$. Es folgt

$$\langle x, x\rangle = \langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle = c\bar{c}\langle x, x\rangle,$$

also $|c|^2 = c\bar{c} = 1$ und somit $|c| = 1$.

Ist umgekehrt Φ normal und alle EV haben den Betrag 1, dann ex. eine ONB aus EV, so dass A_Φ die Form

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{C}, |c_i| = 1,$$

hat. Es folgt

$$\bar{A}_\Phi^\top A_\Phi = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{c}_n c_n \end{pmatrix} = E_n,$$

also ist Φ eine Isometrie.

(d) Sei Φ bijektiv und $\Phi^* = \Phi^k$ für ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Dann gilt

$$\Phi^* \circ \Phi = \Phi^k \circ \Phi = \Phi \circ \Phi^k = \Phi \circ \Phi^*,$$

also ist Φ normal.

Sei nun c EW von Φ, d.h., es gibt ein $x \neq 0$ mit $\Phi(x) = cx$. Es gilt

$$c\langle x, x\rangle = \langle \Phi(x), x\rangle = \langle x, \Phi^*(x)\rangle = \langle x, \Phi^k(x)\rangle = \langle x, c^k x\rangle = \bar{c^k}\langle x, x\rangle$$

und damit $c = \bar{c}^k$, was $|c| = |c|^k$ bzw. $|c|(1 - |c|^{k-1}) = 0$ impliziert. Da $c \neq 0$ und $k \geq 2$ gilt, folgt $|c|^{k-1} = 1$ und damit $|c| = 1$. Also ist Φ eine Isometrie.

Lösung zu Aufgabe 3 (9. Übungsblatt)

Φ normal $\Rightarrow \operatorname{Kern}\Phi = \operatorname{Kern}\Phi^*$ (wegen $\|\Phi(v)\| = \|\Phi^*(v)\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$) und $\operatorname{Kern}\Phi^* \perp \operatorname{Bild}\Phi$ (wegen $\langle \Phi(v), w\rangle = \langle v, \Phi^*(w)\rangle = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ und $w \in \operatorname{Kern}\Phi^*$), also $\operatorname{Kern}\Phi \perp \operatorname{Bild}\Phi$. Da

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -33 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild}\Phi \text{ und } \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -33 \end{pmatrix} \rangle \neq 0, \text{ folgt } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Kern}\Phi.$$

$$\Rightarrow \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a \neq 0, \text{ und } [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -33 \end{pmatrix}] \subset \operatorname{Bild}\Phi.$$

Φ nicht injektiv $\Rightarrow \dim \operatorname{Kern}\Phi \geq 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Bild}\Phi \leq 2$

$$\Rightarrow \operatorname{Bild}\Phi = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -33 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

$$\operatorname{Kern}\Phi = (\operatorname{Bild}\Phi)^\perp = [\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

$\operatorname{Bild}\Phi$ ist Φ-invariant $\Rightarrow \Phi \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b, c \in \mathbb{R}$, wobei wegen $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$ gilt:

$$b = \langle \Phi \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = a \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow B := (\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ ist ONB von } \mathbb{R}^3 \text{ aus EVen von } \Phi.$$

Die Abbildungsmatrix von Φ bzgl. B ist

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Zu bestimmen sind noch a und c: Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

liefert $x_2 = 11, 3x_1 + 4x_3 = 4, -4x_1 + 3x_3 = -5$, woraus sich $x_3 = \frac{1}{25}, x_1 = \frac{32}{25}$ ergibt. Somit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -33 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{32}{25} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \cdot a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \cdot c \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -33 = 11a, 4 = c \cdot \frac{4}{25}$ und $3 = c \cdot \frac{3}{25} \Rightarrow a = -3, c = 25,$

$$\Rightarrow A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 4 (9. Übungsblatt)

Da Φ normal ist und $\dim V < \infty$, gibt es eine ONB aus EV von Φ, so dass

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

gilt. Wegen

$$A_\Phi^k = \begin{pmatrix} c_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

folgt für $q = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$

$$q(A_\Phi) = b_0 E_n + b_1 A_\Phi + \ldots + b_m A_\Phi^m = \begin{pmatrix} q(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q(c_n) \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis, dass $q(\Phi)$ eine Isometrie von V ist, g.z.z.: $q(A_\Phi)$ ist unitär, d.h., $\overline{q(A_\Phi)}^\top q(A_\Phi) = E_n$. Wegen

$$0 = p(A_\Phi) = \begin{pmatrix} p(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(c_n) \end{pmatrix}$$

ist $p(c_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und somit $|q(c_i)| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Also

$$\overline{q(A_\Phi)}^\top q(A_\Phi) = \begin{pmatrix} \overline{q(c_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{q(c_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(c_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q(c_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |q(c_1)|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |q(c_n)|^2 \end{pmatrix} = E_n.$$