Karlsruher Institut für Technologie
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

Aufgaben für die Tutorien zum 5. Übungsblatt

Themen: Skalarprodukt, Orthogonalität, Orthonormalbasis

Vorschlag 1.
Entscheide, für welche der folgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $\langle x, y\rangle := x^\top A\, y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erklärt ist:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vorschlag 2.
Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ wird durch $\langle x, y\rangle := x^\top Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ erklärt?

Vorschlag 3.
Seien A und B Teilmengen eines euklidischen Vektorraums. Man zeige:

$$A \perp B \iff A \perp [B] \iff [A] \perp [B]$$

Vorschlag 4.
Es sei B eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass B ONB bezüglich des Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = x^\top Ay$ ist.

Vorschlag 5.
Bestimme eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

erzeugten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$.

Vorschlag 6.
Auf $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist durch $\langle A, B\rangle := \operatorname{Spur}(A^\top B)$ bekanntlich ein Skalarprodukt definiert. Bestimme eine ONB von

$$U = [\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}].$$

Vorschlag 7.
Gegeben sei der reelle Vektorraum $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \ : \ \operatorname{Grad} p \leq 3\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Bestimme eine ONB von V.