FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

Aufgaben für die Tutorien zum 8. Übungsblatt

Themen: Isometrien, euklidische Normalform

Vorschlag 1.
Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie. Zeige:

$$\det \Phi = \quad 1 \;\Rightarrow\; \exists\, x \neq o : \; \Phi(x) = x \quad \text{und} \quad \det \Phi = -1 \;\Rightarrow\; \exists\, x \neq o : \; \Phi(x) = -x$$

Vorschlag 2.
Es sei Φ eine Isometrie eines dreidimensionalen euklidischen Vektorraums V.

(a) Zeige, dass es eine ONB von V gibt, bzgl. der Φ die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

hat mit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ und $\omega \in [0, \pi]$. *(Beachte: Nicht $\omega \in [0, 2\pi)$!)*

(b) Zeige, dass die Normalform von Φ durch die beiden Größen $\det \Phi$ und $\operatorname{Spur} \Phi$ eindeutig bestimmt ist. Warum reicht eine der beiden Größen nicht aus?

(c) Sei jetzt $V = \mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt. Φ habe bzgl. der Standardbasis die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Normalform von Φ, zunächst wie in der Vorlesung über die Eigenwerte von Φ, und dann mit Teil (b).

Vorschlag 3.
Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & a & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme a so, dass Φ eine Isometrie ist. Berechne für dieses a die Normalform $\tilde{A}$ der Isometrie und eine orthogonale Matrix S mit $S^\top A S = \tilde{A}$.

Vorschlag 4.
Es seien V ein euklidischer Vektorraum und $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige:

(a) Ist Φ Isometrie, so gilt: Φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \Phi^2 = \mathrm{id}$

(b) Ist Φ selbstadjungiert, so gilt: Φ Isometrie $\Leftrightarrow \Phi^2 = \mathrm{id}$

Vorschlag 5.
Im $\mathbb{R}^3$ sei bzgl. der ONB $B = (x_1, x_2, x_3)$ der Endomorphismus Φ durch $\Phi(x_1) = x_2$, $\Phi(x_2) = x_3$, $\Phi(x_3) = x_1$ gegeben.

(a) Ist Φ eine Isometrie?

(b) Bestimme die Abbildungsmatrix von Φ bzgl. B.

(c) Bestimme die Normalform $\tilde{A}$ von Φ mit zugehöriger ONB $\tilde{B}$ und eine orthogonale Matrix S mit $\tilde{A} = S^\top A S$.