FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

Aufgaben für die Tutorien zum 11. Übungsblatt

Themen: affine Räume, affine Unterräume, Koordinatensysteme, affine Unabhängigkeit

Vorschlag 1.
Im affinen Raum $\mathbb{A}$ mit Ursprung O seien die Punkte $P_0, \ldots, P_n$ gegeben. Weiter sei $X \in \mathbb{A}$ gegeben durch $\overrightarrow{OX} = a_0\overrightarrow{OP_0} + \ldots + a_n\overrightarrow{OP_n}$, $\sum_{i=0}^n a_i = 1$. Zeige, dass für alle $O' \in \mathbb{A}$ gilt

$$\overrightarrow{O'X} = a_0\overrightarrow{O'P_0} + \ldots + a_n\overrightarrow{O'P_n}.$$

Folgere, dass die Definition des Schwerpunktes unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.

Vorschlag 2.
In der affinen Ebene $\mathbb{A}$ mit Koordinatensystem $(O; b_1, b_2)$ seien die Punkte $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, $R(z_1, z_2)$ gegeben. Zeige:

$$P, Q, R \text{ kollinear } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Vorschlag 3.
Zeige für ein echtes Viereck $ABCD$ in $\mathbb{A}$: $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gelten.

Vorschlag 4.
Der Körper $\mathbb{K}$ habe eine Charakteristik $\neq 2, 3$. Im affinen Raum $\mathbb{A}$ mit Ursprung O sei ein echtes Dreieck ABC gegeben. Zeige:

(a) Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S.

(b) Es ist $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
(S ist also der Schwerpunkt des Dreiecks.)

Vorschlag 5.
Zeige für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Die Höhen eines echten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Die Mittelsenkrechten eines echten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Diese beiden Punkte und der Punkt S aus Aufgabe 4 liegen auf einer Geraden.