FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
ARBEITSGRUPPE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dr. S. Winter

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (SS 2011)

Aufgaben für die Tutorien zum 13. Übungsblatt

Themen: nochmal affine Abbildungen, Fixpunkte, Fixgeraden etc.; Quadriken

Vorschlag 1.
Zeige: Besitzt eine affine Abbildung $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ zwei verschiedene Fixpunkte P und Q, so ist die Verbindungsgerade $g = PQ$ eine Fixpunktgerade von φ.

Vorschlag 2.
Im n-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}$ (mit $n \geq 2$) sei eine axiale Affinität gegeben, d.h. eine Affinität $\varphi \neq \mathrm{id}$ von $\mathbb{A}$, die eine Hyperebene $H \subset \mathbb{A}$ punktweise fest lässt. Zeige:

(a) $\varphi(P) = P \Leftrightarrow P \in H$

(b) Sind $P, Q \in \mathbb{A}$ keine Fixpunkte, so ist $P\varphi(P) \,||\, Q\varphi(Q)$.

(c) Ist $\varphi(g) = g$ für eine Gerade $g \not\subset H$, so existiert ein $P \in \mathbb{A}$ mit $g = P\varphi(P)$.

Vorschlag 3.
Im n-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}$ seien die Streckungen φ_1, φ_2 mit Fixpunkten P_1 bzw. P_2 und Streckungsfaktoren c_1 bzw. c_2 gegeben, wobei $P_1 \neq P_2$ sein soll. Zeige: $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1$ ist eine Translation mit Translationsvektor $a\overrightarrow{P_1P_2}$, $a \in \mathbb{R}$ oder eine Streckung mit Fixpunkt $P \in P_1P_2$.

Vorschlag 4.
Bestimme im $\mathbb{R}^3$ die affine Normalform der Quadrik

$$\mathcal{Q}: \ 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

sowie ein affines Koordinatensystem, in dem $\mathcal{Q}$ die Normalform annimmt.

Vorschlag 5.
Im $\mathbb{R}^3$ seien die Quadriken

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}&: \ x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0 \\ \mathcal{Q}_a&: \ (a+3)x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 - 4x_2 = 4 \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}_a$ affin äquivalent sind.

(b) Gib für $a = -2$ eine Affinität φ an, die $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{Q}_{-2}$ abbildet.

Vorschlag 6.
Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sei ein einschaliges Hyperboloid $\mathcal{Q}$ gegeben durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$. Schneide $\mathcal{Q}$ mit den Ebenen

$$\begin{aligned} E_1&: \ x_1 = 1 \\ E_2&: \ x_1 = 2 \\ E_3&: \ x_1 + x_3 = 2 \end{aligned}$$

und bestimme den Typ der Kegelschnitte $\mathcal{Q} \cap E_i$.