Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A normal ist.

(b) Ist $\Phi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $v \mapsto A \cdot v$ eine Isometrie bzgl. des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^3$?

(c) Finden Sie eine unitäre Matrix S, so dass $S^* \cdot A \cdot S$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = x^\top \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot y$$

versehen. Finden Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A \cdot v$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ \alpha & -1 & \alpha - 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ selbstadjungiert ist. Stellen Sie für diese α eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Φ auf.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum. Ein Isomorphismus $\Phi\colon V \to V$ heißt *isogonal*, wenn für alle $u, v \in V$ mit $u \perp v$ auch $\Phi(u) \perp \Phi(v)$ gilt. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus Φ genau dann isogonal ist, wenn ein reelles $\lambda > 0$ existiert, so dass $\lambda\,\Phi$ eine Isometrie von V ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für einen Isomorphismus $\alpha\colon V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen, unitären Vektorräumen mit inverser Abbildung $\omega\colon W \to V$ definieren wir $\Lambda(\alpha) = \omega^*$. Zeigen Sie:

(a) Ist α ein Isomorphismus, so ist auch $\Lambda(\alpha)$ ein Isomorphismus.

(b) Ist $\beta\colon U \to V$ ein weiterer Isomorphismus, so ist $\Lambda(\alpha \circ \beta) = \Lambda(\alpha) \circ \Lambda(\beta)$.

Nun definieren wir durch $\alpha \mapsto \Lambda(\alpha)$ eine Abbildung $\Lambda\colon \operatorname{Aut}(V) \to \operatorname{Aut}(V)$. Zeigen Sie:

(c) Λ ist ein Gruppenisomorphismus.

(d) Λ bildet die Untergruppe $N \subseteq \operatorname{Aut}(V)$ der normalen Isomorphismen in sich selber ab.

(e) α ist genau dann eine lineare Isometrie, wenn $\Lambda(\alpha) = \alpha$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 10. 06. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!