Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 2 **26.04.2024**

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{p \in \mathbb{R}[X] : \deg(p) \leq 2\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}dt.$$

Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt Verfahren aus der Basis $\{1, X, X^2\}$ eine Orthonormalbasis von V. *(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$.)*

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n a_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$$

gilt.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty := \sup(\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}) \qquad (x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n)$$

für $n \in \mathbb{N}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. (Diese Norm wird *Supremumsnorm* genannt.)

b) Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_\infty$ nicht von einem Skalarprodukt induziert ist.