Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 6 **31.05.2024**

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$.

a) Finden Sie eine geordnete Basis B_1 von $\mathbb{R}^3$ so, dass $M_{B_1,B_1}(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

b) Finden Sie eine geordnete Orthonormalbasis B_2 von $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt, sodass $M_{B_2,B_2}(\phi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

c) Zeigen Sie, dass keine Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt so existiert, dass $M_{B,B}(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (*Lemma 2.4.3*) *(8 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Die Menge $S := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A = A^*\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Wenn $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert sind, so ist AB genau dann selbstadjungiert, falls $AB = BA$.

c) Die Diagonaleinträge jeder selbstadjungierten Matrix sind reell.

d) Für jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es selbstadjungierte Matrizen $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A = X + iY$. Diese Zerlegung ist eindeutig.