Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 — **Wintersemester 2023/24**

Musterlösung zu Übungsblatt 7 — **07.06.2024**

Aufgabe 1 (*Lemma 2.6.12*) (*8 Punkte*)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Wir setzen

$$\overline{v} := \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathrm{Re}(v) := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(z_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(v) := \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(z_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Im}(z_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) = \mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v))$.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   (i) $\mathrm{Im}(v) \perp \mathrm{Re}(v)$ in $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und $\|\mathrm{Re}(v)\| = \|\mathrm{Im}(v)\|$.
   (ii) $v \perp \overline{v}$ in $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es gilt $v = \mathrm{Re}(v) + i\mathrm{Im}(v)$ und $\overline{v} = \mathrm{Re}(v) + i\mathrm{Im}(v)$ sowie $\mathrm{Re}(v) = \frac{1}{2}(v + \overline{v})$ und $\mathrm{Im}(v) = \frac{1}{2i}(v - \overline{v})$. Damit ist $v, \overline{v} \in \mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v))$ und $\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v) \in \mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(v, \overline{v})$. Somit ist $\mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v)) = \mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(v, \overline{v})$.

b) Es gelte (i). Wir haben

$$\begin{aligned} \langle v, \overline{v} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(z_i)^2 + 2i\mathrm{Re}(z_i)\mathrm{Im}(z_i) \\ &= \|\mathrm{Re}(v)\|^2 - \|\mathrm{Im}(v)\|^2 + 2i\langle \mathrm{Re(v)}, \mathrm{Im}(v) \rangle = 0 \end{aligned}$$

und somit folgt (ii).

Es gelte (ii). Nach obiger Rechnung gilt dann

$$0 = \|\mathrm{Re}(v)\|^2 - \|\mathrm{Im}(v)\|^2 + 2i\langle \mathrm{Re(v)}, \mathrm{Im}(v) \rangle$$

und damit $\|\mathrm{Re}(v)\|^2 - \|\mathrm{Im}(v)\|^2 = 0$ und $\langle \mathrm{Re(v)}, \mathrm{Im}(v) \rangle = 0$. Somit folgt (i).

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \rangle := \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} a_k b_k,$$

wobei $\sum_{i=0}^{n} a_i X^j, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ (Dieses Skalarprodukt kennen Sie aus Aufgabe 2 Blatt 1). Wir definieren die Abbildungen

$$R : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+1}$$

und

$$L : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n \mapsto a_1 + a_2 X + \dots a_n X^{n-1}.$$

Zeigen Sie, dass R und L adjungiert sind.

Lösung zu Aufgabe 2

Es seien $P(X) := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, Q(X) := \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in \mathbb{R}[X]$. Dann gilt

$$\langle R(P), Q \rangle = \langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+1}, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \rangle = 0 b_0 + a_0 b_1 + \dots + a_{k-1} b_k$$

mit $k = \min\{n+1, m\}$. Weiter gilt

$$\langle P, L(Q) \rangle = \langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, b_1 + b_2 X + \dots b_m X^{m-1} \rangle = a_0 b_1 + \dots + a_l b_{l+1}$$

mit $l = \min\{n, m-1\}$. Somit sind R und L adjungiert.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt sowie $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\varphi^* = \varphi = \varphi^2$$

folgt, dass ein Untervektorraum $U \leq V$ so existiert, dass $\varphi = \pi_U$.

Lösung zu Aufgabe 3

Da φ selbstadjungiert ist, finden wir nach dem Spektralsatz eine Basis B so, dass $(a_{ij}) = A := M_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\varphi)$ in Diagonalform mit reellen Diagonaleinträgen (a_{ii}) ist. Nun muss jeder dieser Einträge a_{ii} die Gleichung $a_{ii} = a_{ii}^2$ erfüllen und ist somit entweder 0 oder 1. Also hat φ nur die Eigenwerte 0 und 1. Es sei nun $E_1(\varphi)$ der Eigenraum zum Eigenwert 1 und $E_0(\varphi)$ der Eigenraum zum Eigenwert 0. Dann gilt $E_1(\varphi) \perp E_0(\varphi)$ (das ist äquivalent zur orthogonalen/unitären Diagonalisierbarkeit). Alternativ kann man sich auch überlegen, dass für $v \in E_0(\varphi)$ und $w \in E_1(\varphi)$ gilt, dass

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle = \langle \varphi^*(v), w \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle = \langle 0, w \rangle = 0.$$

Damit sehen wir, dass $E_1(\varphi)^\perp = E_0(\varphi)$. Setzten wir $U := E_1(\varphi)$, so gilt nun $U^\perp = E_1(\varphi)^\perp = E_0(\varphi)$. Ist also $v \in V$ und sind $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$ mit $v = u + u\perp$, so folgt

$$\varphi(v) = \varphi(u + u^\perp) = \varphi(u) = u = \pi_U(v).$$

Da dies für alle $v \in V$ gilt, folgt $\pi_U = \varphi$.