Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Übungsblatt 10 **28.06.2024**

Aufgabe 1

a) Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass für je zwei Basen B, C von V gilt, dass

$$\det \mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = \det \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta)$$

b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem ein $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert, welches $a^2 \neq 1$ erfüllt. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auf $\mathbb{K}^n$ eine Bilinearform $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ und Basen B und C von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass

$$\det \mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) \neq \det \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta)$$

gilt.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir betrachten die Bilinearform

$$\beta : \mathbb{K}^{2\times 2} \times \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K},\ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB).$$

Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix von β bezüglich der Basis

$$\mathsf{B} := (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}).$$

Finden Sie ein $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ mit $\beta(A, A) = 0$. Folgern Sie, dass β im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kein Skalarprodukt ist.