Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Übungsblatt 11 **05.07.2024**

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir betrachten auf $\mathbb{F}_2^2$ die Bilinearform

$$\beta : \mathbb{F}_2^2 \times \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2,\ (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Zeigen Sie, dass keine Basis B von $\mathbb{F}_2^2$ existiert bezüglich der $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ in Diagonalform ist.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Wir betrachten die Bilinearform

$$\beta : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{C}^3$ so, dass

$$\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -3 & -i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir sagen, dass eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ antisymmetrisch ist, wenn

$$\beta(x, y) = -\beta(y, x)$$

für alle $x, y \in V$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$ den Vektorraum der antisymmetrischen Bilinearformen und mit $\mathrm{SBil}(V, \mathbb{K})$ den Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bil}(V, \mathbb{K}) = \mathrm{SBil}(V, \mathbb{K}) \oplus \mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$.

b) Nun sei $n := \dim V < \infty$. Zeigen Sie: Existiert ein nicht entartetes $\beta \in \mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k$.

Eine antisymmetrische Bilinearform heißt nicht entartet, falls für jedes $x \in V$ ein $y \in V$ mit $\beta(x, y) \neq 0$ existiert. Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass eine antisymmetrische Bilinearform β genau dann nicht entartet ist, wenn $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ für jede Basis B von V invertierbar ist.