Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Musterlösung zu Übungsblatt 11 **05.07.2024**

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Wir betrachten auf $\mathbb{F}_2^2$ die Bilinearform

$$\beta : \mathbb{F}_2^2 \times \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2,\ (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Zeigen Sie, dass keine Basis B von $\mathbb{F}_2^2$ existiert bezüglich der $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ in Diagonalform ist.

Lösung zu Aufgabe 1

Wir haben

$$\beta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = 2ab = 0.$$

Somit hat $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ ist für jede Basis $\mathsf{B} = (b_1, b_2)$ nur Null-Einträge auf der Diagonalen. Ist also $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ in Diagonalform, so ist $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ die Null-Matrix. Da $\beta(e_1, e_2) = 1 \neq 0$, ist β nicht die Null-Bilinearform und damit kann dies nicht sein.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Wir betrachten die Bilinearform

$$\beta : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{C}^3$ so, dass

$$\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -3 & -i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

Mit dem symmetrischen Gauss-Algorithmus folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -3 & -i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Idee ist nun, den symmetrischen Gauss-Algorithmus umgekehrt durchzuführen um B zu finden. Wir wenden die Umformungen auf die Basis $\mathsf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ an. Dann erhalten wir

$$(b_1, b_2, b_3) \rightsquigarrow (b_1, b_2 + 2ib_1, b_3) \rightsquigarrow (b_1, b_2 + 2ib_1, b_3 + ib_2 - 2b_1) \rightsquigarrow (b_1, b_2 + ib_1, \frac{1}{\sqrt{3}}(b_3 + ib_2 - 2b_1)).$$

Wir setzen nun $e_1 = b_1$, $e_2 = b_2 + 2ib_1$ und $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_3 + ib_2 - 2b_1)$ und lösen nach b_1, b_2, b_3 auf. Es gilt

$$b_2 = e_2 - 2ie_1 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$b_3 = \sqrt{3}e_3 + 2e_1 - i(e_2 - 2ie_1) = \sqrt{3}e_3 - ie_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $M_{\mathsf{E},\mathsf{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -3 & -i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die gesuchte Basis gefunden.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir sagen, dass eine Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ antisymmetrisch ist, wenn

$$\beta(x, y) = -\beta(y, x)$$

für alle $x, y \in V$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$ den Vektorraum der antisymmetrischen Bilinearformen und mit $\mathrm{SBil}(V, \mathbb{K})$ den Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bil}(V, \mathbb{K}) = \mathrm{SBil}(V, \mathbb{K}) \oplus \mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$.

b) Nun sei $n := \dim V < \infty$. Zeigen Sie: Existiert ein nicht entartetes $\beta \in \mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 2k$.

Eine antisymmetrische Bilinearform heißt nicht entartet, falls für jedes $x \in V$ ein $y \in V$ mit $\beta(x, y) \neq 0$ existiert. Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass eine antisymmetrische Bilinearform β genau dann nicht entartet ist, wenn $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ für jede Basis B von V invertierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Es sei $\beta \in \mathrm{Bil}(V, \mathbb{K})$. Wir schreiben

$$\beta(x, y) = \frac{1}{2}(\beta(x, y) + \beta(y, x)) + \frac{1}{2}(\beta(x, y) - \beta(y, x))$$

für alle $x, y \in V$. Damit sehen wir, dass $\mathrm{Bil}(V, \mathbb{K}) = \mathrm{SBil}(V, \mathbb{K}) + \mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$. Ist $\beta \in \mathrm{SBil}(V, \mathbb{K}) \cap \mathrm{ABil}(V, \mathbb{K})$, so gilt

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) = -\beta(x, y)$$

für alle $x, y \in V$. Somit gilt für alle $x, y \in V$, dass $\beta(x, y) = 0$ und damit ist $\mathrm{SBil}(V, \mathbb{K}) \cap \mathrm{SBil}(V, \mathbb{K}) = \{0\}$.

b) Ist $\beta \in \mathrm{ABil}(V, K)$ und $\mathsf{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis, so gilt $(\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta))_{i,j} = \beta(b_i, b_j) = -\beta(b_j, b_i) = -(\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta))_{j,i}$. Damit gilt $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)^T = -\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$. Da $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)$ nicht entartet ist, gilt

$$\det(\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)) = \det(\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)^T) = \det(-\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)) = (-1)^n \det(\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta)).$$

Somit muss $(-1)^n = 1$ gelten und es folgt $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.