

# Vorkurs Mathematik für Studierende der Physik, Geophysik und Meteorologie

PD Dr. E. H. Hardy, MINT-Kolleg BW\*

Herbst 2023

Das vorliegende Skriptum fasst den dreiwöchigen Vorkurs Mathematik für Studierende der Physik, Geophysik und Meteorologie sowie Physik Lehramt zusammen.

Das zugrunde liegende Konzept baut sowohl auf den vergangenen einwöchigen Mathematik-Vorkursen der Fakultät für Physik als auch auf den vierwöchigen allgemeinen Mathematik-Vorkursen des MINT-Kollegs BW auf und wurde in Absprache mit der Fakultät für Physik und der Fachschaft entwickelt.

Der Vorkurs soll Schulwissen auffrischen und verfestigen, eventuell vorhandene Lücken schließen und einen Ausblick auf die Höhere Mathematik bieten. Dabei wird gegebenenfalls auf unterschiedliche in der Physik bzw. der Höheren Mathematik übliche Schreibweisen hingewiesen.

Der Übungsteil mit selbständig zu lösenden Aufgaben soll das Auge schulen, Sicherheit verleihen und Geschicklichkeit, Schnelligkeit sowie Ausdauer trainieren.

Die Mathematik stellt eine Vielfalt an Werkzeugen für die anderen Wissenschaften, insbesondere die Physik bereit. Auch wenn vielleicht der spätere eigene Arbeitsschwerpunkt eher bei experimentellen oder

---

\*Das MINT-Kolleg Baden-Württemberg ist ein 2010 gegründetes Verbundprojekt des KIT und der Universität Stuttgart. Es wurde durch den Fonds „Erfolgreich Studieren in Baden-Württemberg (FEST-BW)“ des Ministeriums für Wissenschaft, Forschung und Kunst (MWK) Baden-Württemberg und das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) im Qualitätspakt Lehre gefördert.

Teile des handschriftlichen Manuskriptes wurden von Dr. Thorsten Schwarz vom Studienzentrum für Sehgeschädigte in  $\LaTeX$  gesetzt und können hier erfreulicherweise verwendet werden. Eine kritische Durchsicht erfolgte freundlicherweise durch Dr. Vita Rutka, Dr. Jürgen Liedtke und M. A. Andrea Nitsche vom MINT-Kolleg BW. Für die Unterstützung bei Satz in  $\LaTeX$  sei insbesondere Herrn Dr. Feiler vom MINT-Kolleg BW gedankt. Die Übungsaufgaben stammen aus der umfangreichen Sammlung des MINT-Kollegs BW.

numerischen Untersuchungen als in der theoretischen Physik erwartet wird, ist das Aneignen eines nutzbringenden Umgangs mit diesen Werkzeugen von großem Vorteil. In diesem Sinne: Viel Vergnügen und viel Erfolg!

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zahlbereiche, Gleichungen, Ungleichungen</b>	<b>1</b>
1.1	Natürliche Zahlen . . . . .	1
1.2	Ganze Zahlen . . . . .	1
1.3	Rationale Zahlen . . . . .	2
1.4	Reelle Zahlen . . . . .	2
1.5	Komplexe Zahlen . . . . .	3
1.6	Gleichungen . . . . .	4
1.7	Ungleichungen . . . . .	5
1.8	Erinnerung binomischer Lehrsatz . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>7</b>
2.1	Abbildungen . . . . .	7
2.2	Definition von Folgen . . . . .	7
2.3	Angaben einer Folge . . . . .	7
2.4	Konvergenz . . . . .	8
2.5	Reihen . . . . .	9
2.6	Potenzreihen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Funktionen einer Variablen</b>	<b>12</b>
3.1	Reelle Funktionen einer Variablen . . . . .	12
3.2	Komplexwertige Funktionen . . . . .	13
3.3	Umkehrfunktion . . . . .	13
3.4	Verkettung . . . . .	15
3.5	Gängige Funktionen . . . . .	16
3.5.1	Polynomfunktionen . . . . .	16
3.5.2	Rationale Funktionen . . . . .	16
3.5.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	17
3.5.4	Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Funktionen mehrerer Variablen</b>	<b>22</b>
4.1	Kartesisches Produkt . . . . .	22
4.2	Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	22
4.3	Polynome in mehreren Variablen . . . . .	23
4.4	Verkettung von Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	24
4.5	Ergänzung: Darstellungsmöglichkeiten bei mehreren Variablen . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Differentiation</b>	<b>28</b>
5.1	Kurvensekante . . . . .	28
5.2	Tangente . . . . .	28
5.3	Rechenregeln . . . . .	29
5.4	Wichtige Ableitungen . . . . .	29
5.5	Extremstellen . . . . .	30

5.6	Ableitung bei mehreren Variablen . . . . .	31
5.7	Taylorreihe . . . . .	32
5.8	Standardableitungen und Übersicht Kurvendiskussion . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Integration</b>	<b>35</b>
6.1	Integration und Differentiation . . . . .	35
6.2	Stammfunktionen . . . . .	35
6.3	Integrieren . . . . .	36
6.4	Wichtige Integrale . . . . .	36
6.5	Partielle Integration . . . . .	37
6.6	Substitutionsmethode . . . . .	38
6.7	Schlußbemerkung . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Vektoren und Vektorräume</b>	<b>40</b>
7.1	Allgemeine Vektorräume . . . . .	40
7.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis . . . . .	41
7.3	Euklidische Vektorräume . . . . .	42
7.4	Vektorprodukt . . . . .	43
7.5	Bahnkurve . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Matrizen</b>	<b>45</b>
8.1	Definitionen und Vektorraumeigenschaft . . . . .	45
8.2	Matrixmultiplikation . . . . .	46
8.3	Inverse Matrix . . . . .	47
8.4	Weiteres zu quadratischen Matrizen . . . . .	49
8.5	Determinante . . . . .	50
<b>9</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>52</b>
9.1	Schreibweise und Bezeichnungen . . . . .	52
9.2	Lösungsmenge und Gauß-Algorithmus . . . . .	53
<b>10</b>	<b>Eigenwerte und -räume</b>	<b>55</b>
10.1	Definition . . . . .	55
10.2	Bestimmung der EW, charakteristisches Polynom . . . . .	56
10.3	Bestimmung der EV . . . . .	56
<b>11</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>58</b>
11.1	Beispiele . . . . .	58
11.2	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen . . . . .	60
11.3	Ausblick . . . . .	62
<b>12</b>	<b>Zusammenfassung und Wiederholung an einem Beispiel</b>	<b>63</b>

# Analysis

## 1 Zahlbereiche, Gleichungen, Ungleichungen

### 1.1 Natürliche Zahlen

- Beispiel:

Erste Messung:  $n_1 = 1969$  Zerfälle

Zweite Messung:  $n_2 = 4711$  Zerfälle

Zwischen 1. und 2. Messung:  $\Delta n$  Zerfälle.

Es gilt:  $n_1 + \Delta n = n_2$ .

Es folgt:

$$\begin{aligned}\Delta n = n_2 - n_1 &= 4711 \text{ Zerfälle} \\ &- 1969 \text{ Zerfälle} \\ &= 2742 \text{ Zerfälle.}\end{aligned}$$

- Die *Menge der natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

genügt bei Zählaufgaben.

- Bemerkung:  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

- *Hinweis Fundamentalsatz der Arithmetik*

Jede natürliche Zahl ist (bis auf die Reihenfolge) eindeutig als Produkt von Primzahlen (Primfaktoren) darstellbar (Primfaktorzerlegung). Bsp:  $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ .

### 1.2 Ganze Zahlen

- *Erweiterung* der natürlichen Zahlen um die *negativen Zahlen* (additives Inverses) und um Null (neutrales Element der Addition):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- Für  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{Z}$  gibt es immer eine Lösung  $x \in \mathbb{Z}$  von

$$a + x = b, \text{ nämlich } x = b - a.$$

- Numerik: Exaktes Rechnen (+, −, ·, Division mit Rest) in Teilmengen von  $\mathbb{Z}$  (z. B. Datentypen `int`, `long`) möglich.

## 1.3 Rationale Zahlen

- *Erweiterung* von  $\mathbb{Z}$  um die *Brüche*, bei denen der *Nenner* kein *Teiler* des *Zählers* ist:  
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$
- Für alle  $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{Q}$  gibt es immer genau eine Lösung  $x \in \mathbb{Q}$  von  
 $ax = b$ , nämlich  $x = \frac{b}{a}$ .
- Hinweis: Insbesondere erhält man für  $b = 1$  (neutrales Element der Multiplikation) das Ergebnis  $\frac{1}{a}$  (multiplikatives Inverses).
- Bemerkung: Für alle rationalen Zahlen  $a, b$  mit  $a < b$  gibt es beliebig viele rationale Zahlen  $c$  mit  $a < c < b$ , z. B. das arithmetische Mittel aus  $a$  und  $b$ ,  $\frac{a+b}{2}$ .
- Bemerkung: In der Informatik sind Datentypen wie `double` rationalen Zahlen.

## 1.4 Reelle Zahlen

- Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  um die *irrationalen* Zahlen zu den *reellen* Zahlen,  $\mathbb{R}$ .
- Wie z. B. in einem Widerspruchsbeweis unter Annahme von Teilerfremdheit gezeigt werden kann, ist die positive Lösung von  
 $x \cdot x = x^2 = 2$ , bezeichnet mit  $\sqrt{2}$ , keine rationale Zahl,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
- Weitere Beispiele: Kreiszahl  $\pi \notin \mathbb{Q}$ , Eulersche Zahl  $e \notin \mathbb{Q}$ .  
(Hinweis:  $\pi + e \notin \mathbb{Q}$  wird von den Mathematikern vermutet...)
- Für alle reellen Zahlen  $a, b$  mit  $a < b$  gibt es mindestens eine *rationale* Zahl  $c$  mit  $a < c < b$ .
- Die Menge der reellen Zahlen entspricht der Menge aller Punkte der *Zahlengeraden*.
- Die reellen Zahlen sind der *Zahlbereich* für *Zahlenwerte* des *Größenwerts* einer *Physikalischen Größe*.  
(Hinweis: der Größenwert ist das Produkt aus Zahlenwert und *Einheit*)
- Der Betrag einer reellen Zahl  $a$ , geschrieben  $|a|$ , entspricht auf der Zahlengeraden dem Abstand der Zahl von Null. Definition über Fallunterscheidung:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} .$$

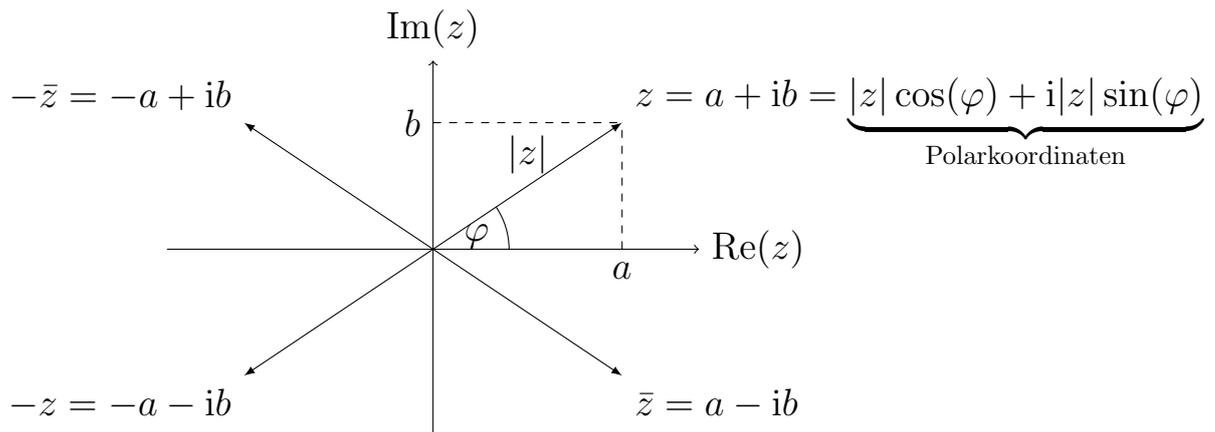
Falls zwischen den Betragsstrichen ein Term steht, muss in der Fallunterscheidung der ganze Term untersucht werden.

## 1.5 Komplexe Zahlen

- Erweiterung von  $\mathbb{R}$  zu der Menge der *komplexen* Zahlen  $\mathbb{C}$ :  
 $\mathbb{C} := \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$  mit  $i^2 = -1$ .
- Bezeichnungen: Für  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  wird  
 $a = \operatorname{Re}(z)$  als *Realteil*,  
 $b = \operatorname{Im}(z)$  als *Imaginärteil* und  
 $i$  als *imaginäre Einheit* bezeichnet.  
 $\bar{z} = a - ib$  wird als die zu  $z$  *komplex konjugierte* Zahl bezeichnet, alternativ auch  $z^*$ .
- Bei der *Addition* bzw. *Subtraktion* komplexer Zahlen werden die Realteile und die Imaginärteile getrennt addiert bzw. subtrahiert.  
Beispiel:  $Z_1 = R_1 + iX_1$ ,  $Z_2 = R_2 + iX_2$ ,  
 $Z_{ges} = Z_1 + Z_2 = R_1 + R_2 + i(X_1 + X_2)$   
(Hinweis: Schreibweise wie bei Impedanz aus Resistanz bzw. Wirkwiderstand und Reaktanz bzw. Blindwiderstand, hier ohne nähere Erklärung zur Gewöhnung).
- Bei der *Multiplikation*, also z. B.  
 $(a + ib)(c + id)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , wird ausmultipliziert,  $i^2 = -1$  verwendet und zusammengefasst:  
 $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ .
- **Zwischenaufgabe:** Zeige für  $z$  mit Realteil  $a$  und Imaginärteil  $b$  und  $\bar{z} = a - ib$ :  
 $z\bar{z} = a^2 + b^2$ .
- bei der *Division* wird der Bruch mit dem komplex Konjugierten des Nenners *erweitert*, dann weiter wie bei der Multiplikation:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)\overline{(c + id)}}{(c + id)\overline{(c + id)}} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$$

- Für den *Betrag* der komplexen Zahl  $z$  mit Realteil  $a$  und Imaginärteil  $b$ ,  
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$  rechnet man nach:  
 $|z| = |\bar{z}|$ ,  
 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  
 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .
- Die Menge der komplexen Zahlen entspricht der Menge der Punkte in der *Gaußebene*:



- Das *Polynom*  
 $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{C}$   
hat genau  $n$  *Nullstellen* (Stellen mit  $P(z) = 0$ ), gegebenenfalls unter Berücksichtigung der Vielfachheit (doppelte Nullstellen etc.)  
(Hinweise: Fundamentalsatz der Algebra,  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen, Zerlegung in Linearfaktoren, s. Abschnitt 3.5.1).  
Beispiel 1:  $z^2 + 1$  hat Nullstellen  $i$  und  $-i$ ,  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ .  
Beispiel 2:  $z^4 + 4 = (z - (1 + i))(z - (-1 - i))(z - (1 - i))(z - (-1 + i))$ .
- Die *Euler-Formel* liefert den nützlichen Zusammenhang mit der *Exponentialfunktion*:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

(Hinweis: Kann über die Taylorreihen von  $e$ ,  $\sin$ ,  $\cos$  gezeigt werden, s. 5.7).

## 1.6 Gleichungen

- Eine *Gleichung* ist eine Aussage über die Gleichheit zweier *Terme*, „linke Seite = rechte Seite“.

Beispiel für eine wahre, erfüllte Gleichung:  $1 = 1$ .

Sind *Variablen* enthalten, so wird die Gleichung als Aussageform bezeichnet und die Menge der Variablen, die zu einer wahren Aussage führen, als *Lösungsmenge*  $L$ .

Bei Definitionsgleichungen wird teilweise das Definitionszeichen „:=“ bzw. „=“ verwendet. Beispiel:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} .$$

Algebraische Gleichungen haben Polynome als Terme (lineare, quadratische, kubische Gleichungen etc.). Beispiel:  $ax^2 + bx + c = 0$ , Lösen durch *quadratische Ergänzung*.

Bruchgleichungen haben als Terme Brüche, bei denen die Variable im Nenner vorkommt. Beim Lösen ist der Definitionsbereich zu beachten. Beispiel:  $\frac{1}{1+x} = -1$ .

Bei Wurzelgleichungen enthalten die Terme Wurzeln, unter denen die Variable steht. Beispiel:  $\sqrt{1+x} = -1$  mit Lösungsmenge  $L = \emptyset$  in  $\mathbb{R}$ .

Weitere Beispiele: Exponentialgleichungen, trigonometrische Gleichungen, Funktionalgleichungen, Differentialgleichungen, Integralgleichungen.

Um die Lösungsmenge zu erkennen, können *Äquivalenzumformungen* eingesetzt werden. Bei nicht äquivalenten Umformungen sind die erhaltenen Ergebnisse durch Einsetzen zu prüfen.

## 1.7 Ungleichungen

- Für zwei Terme mit Werten aus  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  können *Ungleichungen* mit den Vergleichszeichen  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$  formuliert werden. Für zwei Terme aus  $\mathbb{C}$  geht dies nicht. Beispiel in  $\mathbb{R}$ :  $|x - 2| < 1$  mit der Lösungsmenge  $L = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\} = (1, 3)$ .
- Die Addition eines Terms auf beiden Seiten einer Ungleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Bei der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl wird das Vergleichszeichen umgekehrt.

Sind beide Terme echt positiv, kann auf beiden Seiten der Kehrwert gebildet werden und das Vergleichszeichen umgekehrt werden.

## 1.8 Erinnerung binomischer Lehrsatz

- Ausmultiplizieren von  $(a + b)^n$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und Zusammenfassen von Termen mit gleichen Potenzen liefert  $n + 1$  Summanden:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Hierbei gilt  $0^0 = 1$ . Die Binomialkoeffizienten können aus dem Pascalschen Dreieck abgelesen werden oder gemäß

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

berechnet werden,  $n, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \leq n$  mit der Fakultät

$$n! = 1 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

und  $0! = 1$ .

- **Zwischenaufgabe:** Multiplizieren Sie  $(a \pm b)^2$  oder  $(a \pm b)^3$  aus, indem Sie
  - a) das Distributivgesetz bzw.
  - b) den binomischen Lehrsatzausführlich anwenden
- **Schlussaufgabe** Setzen Sie  $\varphi = \pi$  in die Euler-Formel ein. Das Ergebnis wird Euler-Identität genannt.

# Analysis

## 2 Folgen und Reihen

### 2.1 Abbildungen

- Eine *Abbildung* oder auch *Funktion*  $f$ ,

$$f : D \rightarrow W, x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Element  $x$  des *Definitionsbereichs*  $D$  *genau* ein Element  $f(x)$  aus dem *Zielbereich*  $W$  zu.

### 2.2 Definition von Folgen

- Eine Abbildung, deren Definitionsbereich aus den natürlichen Zahlen besteht, wird als *Folge* bezeichnet:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow W, n \mapsto f(n) =: f_n .$$

Bei einigen Folgen ist  $\mathbb{N}_0$  als Definitionsbereich zweckmäßig.

- Eine Folge mit  $W = \mathbb{R}$  wird als *reelle Zahlenfolge* bezeichnet.
- Schreibweise für  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ :  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)$ .
- Beispiele für Abbildungen einer Teilmenge der natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen:
  - a) Zeitliche Abfolge von Ergebnissen einer manuellen oder automatischen Messwerterfassung.
  - b) Inhalt einer Feldvariablen in der Informatik als Beispiel einer endlichen Folge.

### 2.3 Angaben einer Folge

- Angabe von *Anfangsgliedern*:  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ , z. B.

$$(a_n) = (2, 3, 5, \dots)$$

Diese Angabe ist nicht eindeutig. Mögliche Fortsetzungen hier: 8, 12, 17, oder 7, 11, 13, oder 5, 5, 5, oder 2, 3, 5 etc.

- Angabe einer *Zuordnungsvorschrift*, z. B.

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

oder

$$u_n = 2n - 1$$

für die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen.

- Angabe einer *Rekursion*. Beispiele:
  - a) Heron-Verfahren zur Näherung der Quadratwurzel einer Zahl  $x > 0$ .
    - Als *Anfangswert* kann der Funktionswert der Tangente an die Wurzelfunktion an der Stelle 1, also  $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$  genommen werden.
    - Die *Rekursionsvorschrift* lautet  $a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}} \right)$ .
 Für  $x = 9$ :  $(a_n) = (5, 3 + \frac{4}{10}, 3 + \frac{2}{85}, 3 + \frac{2}{21845}, \dots)$ . (Hinweis: dies entspricht dem Newton-Verfahren für die Funktion  $f(\xi) = \xi^2 - x$ )
  - b) Fibonacci-Folge mit Anfangswerten  $a_1 = 0$  und  $a_2 = 1$  und der Rekursionsvorschrift  $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ .
- Folgen können Eigenschaften wie *Periodizität*, *Monotonie*, *Beschränktheit*, *Konvergenz* (s. u.) u. s. w. aufweisen. Um einen Eindruck zu bekommen, kann man die Anfangsglieder berechnen und in einen Funktionsgraphen einzeichnen.

## 2.4 Konvergenz

- Eine Folge  $(a_n)$  *konvergiert* gegen den *Grenzwert*  $a$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_\epsilon$  gilt:

$$|a_n - a| < \epsilon$$

Im Unendlichen kommen die Folgenglieder dem Grenzwert also beliebig nahe.

Schreibweisen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

- Beispiele für konvergente Folgen:
  - a)  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  ist eine Nullfolge, d. h.  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
  - b) Für  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$  ist die *geometrische* Folge  $(q^n)$  eine Nullfolge,  $q^n \rightarrow 0$
  - c)  $(a_n) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  konvergiert gegen  $e^x$ .

- Für konvergente Folgen gibt es Rechenregeln, zum Beispiel gilt mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  auch  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  und  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ .
- Ein nützliches Konvergenzkriterium ist das *Sandwichkriterium*:  
Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $A \in \mathbb{R}$ , wenn es Folgen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt mit  $b_n \leq a_n \leq c_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ , siehe Übung.
- Anwendungen: Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen einer reellen Variablen.

## 2.5 Reihen

- Zu jeder Folge  $(a_n)$  kann eine neue Folge  $(s_n)$  konstruiert werden, indem

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

definiert wird. Die Folge  $(s_n)$  wird dann auch als *Reihe* zur *Summandenfolge*  $(a_n)$  bezeichnet und die Folgenglieder  $s_n$  der Reihe als *Partiellsummen*.

- Für die Konvergenz der Reihe ist *notwendig*, dass die Summandenfolge gegen null konvergiert, aber nicht *hinreichend*.
- Beispiele:
  - a) Die *harmonische* Reihe mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

konvergiert nicht. Dafür sagt man auch: sie ist *divergent*.

- b) Die *alternierende* harmonische Reihe mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

ist konvergent (mit Grenzwert  $\ln 2$ ).

- c) Die Reihe mit  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  ist konvergent (mit Grenzwert  $\frac{\pi^2}{6}$ ).
- d) Die *geometrische* Reihe mit  $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$  ist
  - divergent für  $|q| \geq 1$  und
  - konvergent für  $|q| < 1$  (mit Grenzwert  $\frac{1}{1-q}$ )

- Für einige Partialsummen gelingt die Angabe einer *geschlossenen* Darstellung. Beispiele:

a) Für eine *Teleskopreihe*  $(s_n)$  mit  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1}$  ist

$$\sum_{k=1}^n a_k = b_1 - b_{n+1}$$

b) Für die endliche *arithmetische* Reihe liefert der „kleine Gauß“

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) Für die Summe der Quadrate der ersten  $n$  natürlichen Zahlen kann man mit *vollständiger Induktion* zeigen:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Zwischenaufgabe:** Beweisen Sie folgende Gleichung durch Umformungen unter Nutzung obiger Beispiele:

$$\sum_{l=0}^{n-1} l(l+1) = \frac{(n^2-1)n}{3}$$

(Bemerkung: Hauptquantenzahl  $n = 1, 2, 3, \dots$ , Nebenquantenzahl  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , quantenmechanischer Drehimpuls mit  $\langle lm | \hat{L}^2 | lm \rangle = \hbar^2 l(l+1)$ )

## 2.6 Potenzreihen

- Multipliziert man bei einer Reihe jedes Glied  $a_k$  der Summandenfolge mit dem *Polynom*  $(x - \xi)^k$ , so erhält man ein als *Potenzreihe* bezeichnetes „unendlich langes Polynom“:

$$P_{a,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \xi)^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k (x - \xi)^k \right)$$

Die Definitionsmenge  $D_{a,\xi}$  der Potenzreihe, das ist die Menge aller  $x$ , für die obiger Grenzwert existiert, wird *Konvergenzbereich* genannt. Der Konvergenzbereich enthält mindestens den *Entwicklungspunkt*  $\xi$ :

$$P_{a,\xi}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 0^0 = a_0$$

- Eine Potenzreihe kann auch auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergieren. Gilt weder  $D_{a,\xi} = \{\xi\}$  noch  $D_{a,\xi} = \mathbb{R}$ , so ist der Konvergenzbereich ein Intervall der Form  $[\xi - r, \xi + r]$  oder  $[\xi - r, \xi + r)$  oder  $(\xi - r, \xi + r]$  oder  $(\xi - r, \xi + r)$  mit dem *Konvergenzradius*  $r$ .

- Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x - 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergiert auf ganz  $\mathbb{R}$ , und zwar gegen die Funktion  $e^x$ .

- Anwendungen: Lösen von Differentialgleichungen, Taylorreihen.

# Analysis

## 3 Funktionen einer Variablen

### 3.1 Reelle Funktionen einer Variablen

- Reelle Funktionen einer reellen Variablen sind Abbildungen mit Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  und Zielbereich  $W \subseteq \mathbb{R}$ .
- Beispiele mit unterschiedlichen Schreibweisen:

a)

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = 2x - 1$$

Hier wird der Funktionsname mit  $f$  bezeichnet, die *unabhängige Variable* aus  $D = [0, 1]$  mit  $x$  und die *abhängige Variable* aus  $W = \mathbb{R}$  mit  $y$ .

b)

$$E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto E = E(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

Hier werden die Funktion und die abhängige Variable gleich bezeichnet.

c)

$$s : \begin{cases} [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto s(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

d)

$$A : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \frac{2\pi}{L}x) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{L}x)) \end{cases}$$

Hier wird die Funktion über eine Reihe von Funktionen definiert. Damit die Grenzfunktion existiert, muss die Koeffizientenfolge  $(a_k)$  entsprechende Eigenschaften haben.

- Funktionen können *bijektiv* (umkehrbar) sein. Sie können weitere Eigenschaften wie Periodizität, Monotonie, *Symmetrie* u.s.w. aufweisen.
- Um einen Eindruck einer reellen Funktion  $f(x)$  zu bekommen, kann der *Funktionsgraph*

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D\}$$

oder ein Ausschnitt davon gezeichnet werden.

## 3.2 Komplexwertige Funktionen

- Häufig wird mit komplexwertigen Funktionen mit reellem Definitionsbereich gerechnet, also

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x)$$

- Beispiel:

$$Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \omega \mapsto Z(\omega) = \frac{R}{1 + iRC\omega} = \frac{R}{1 + (RC)^2\omega^2} - i \frac{R^2C\omega}{1 + (RC)^2\omega^2}.$$

Das Beispiel beschreibt die frequenzabhängige Impedanz eines Widerstandes  $R$  in Parallelschaltung mit einem Kondensator der Kapazität  $C$ .

- Bei komplexwertigen Funktionen kann kein Funktionsgraph in der Ebene gezeichnet werden. Statt dessen kann man z. B. Funktionsgraphen für den Realteil, den Imaginärteil oder den Betrag der Funktion zeichnen oder eine Kurve in der Gaußebene. Letzteres für das obige Beispiel, also die Kurve

$$\left\{ \left( \frac{R}{1 + (RC)^2\omega^2}, -\frac{R^2C\omega}{1 + (RC)^2\omega^2} \right) \in \mathbb{R}^2 : \omega \in \mathbb{R} \right\},$$

ergibt einen Halbkreis in der unteren Gaußebene. An dem 'Startpunkt'  $\omega = 0$  (Gleichstrom) ist  $Z = R$ . Bei hohen Frequenzen geht der Realteil von  $Z$  quadratisch und der Imaginärteil wie  $-\frac{1}{\omega C}$  (Reaktanz des Kondensators) gegen Null.

## 3.3 Umkehrfunktion

- Häufig wird das Urbild  $x$  eines Funktionswertes  $y$  gesucht. Hat jeder Funktionswert genau ein Urbild, so ist die Funktion *injektiv*. Durch Einschränkung des Zielbereichs auf die Bildmenge

$$B := \{f(x) : x \in D\}$$

wird jede Funktion *surjektiv*. Ist eine Funktion injektiv und surjektiv, so ist sie *bijektiv* und hat eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} : B \rightarrow D, y \mapsto x$$

mit  $y = f(x)$ .

Hinweis: Die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  ist nicht mit dem multiplikativen Inversen  $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$  zu verwechseln!

- Der Funktionsgraph von  $f^{-1}$  wird durch Spiegelung des Funktionsgraphen von  $f$  an der Winkelhalbierenden mit  $y = x$  erhalten.

- Beispiele:

a)

$$f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto y = f(x) = 2x - 1$$

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, 1], y \mapsto x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 1)$$

Nach Berechnen der Zuordnungsvorschrift von  $f^{-1}$  durch Auflösen der Zuordnungsvorschrift von  $f$  nach der unabhängigen Variablen können die Bezeichnungen der Variablen vertauscht werden, also hier  $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$ , s. unten.

b)

$$s : [0, \infty) \rightarrow \left(-\infty, \frac{16}{5}\right], t \mapsto s = s(t) = 3 + 2t - 5t^2$$

ist nicht bijektiv (da nicht injektiv) und daher nicht umkehrbar.

c) Die *Einschränkung* von  $s$

$$\tilde{s} : \left[\frac{1}{5}, \infty\right) \rightarrow \left(-\infty, \frac{16}{5}\right], t \mapsto \tilde{s} = \tilde{s}(t) = 3 + 2t - 5t^2$$

ist bijektiv und daher umkehrbar. Auflösen der Zuordnungsvorschrift nach der unabhängigen Variablen liefert

$$t : \left(-\infty, \frac{16}{5}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{5}, \infty\right), s \mapsto t(s) = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{16 - 5s}}{5}$$

Sowohl die Funktion als auch die Umkehrfunktion wurden so wie die im jeweiligen Fall abhängige Variable bezeichnet. Falls die Variablen mit einer physikalischen Bedeutung verknüpft sind, etwa  $s$  für Weg und  $t$  für Zeit, sollten die Bezeichnungen nach dem Auflösen nicht getauscht werden.

- **Zwischenaufgabe:** Überzeugen Sie sich von der Bijektivität von  $\tilde{s}$  und der Richtigkeit der Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion.
- **Hinweis:** Auch wenn eine Funktion analytisch angegeben werden kann, muss das nicht für die Umkehrfunktion gelten. So kann bei der Keplerbahn mit Polarwinkel  $\theta$  die Zeit  $t$  als Funktion des Polarwinkels,  $t(\theta)$  analytisch angegeben werden. Das Ziel, den Polarwinkel über die Umkehrfunktion  $\theta(t)$  vorherzusagen, kann im Allgemeinen nicht analytisch erreicht werden. Statt dessen werden numerische Verfahren eingesetzt.

### 3.4 Verkettung

- Wenn das Bild  $B$  einer Funktion  $f$  Teilmenge des Definitionsbereichs  $D_g$  einer Funktion  $g$  ist, kann durch *Verkettung* eine neue Funktion  $h$  gebildet werden:

$$\begin{aligned}f &: D_f \rightarrow B, x \mapsto f(x) \\g &: D_g \rightarrow W, x \mapsto g(x) \text{ mit } B \subseteq D_g \\h &: D_f \rightarrow W, x \mapsto h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))\end{aligned}$$

- Wichtige elementare Beispiele:
  - a)  $v(x) = x - a$ ,  $g(v(x)) = g(x - a) =: \tilde{g}(x)$ . Der Graph von  $\tilde{g}$  ergibt sich aus dem Graph von  $g$  durch Verschiebung um  $a$  in *Abszissenrichtung*.
  - b)  $s(x) = ax$ ,  $g(s(x)) = g(ax) =: \tilde{g}(x)$ . Der Graph von  $\tilde{g}$  ergibt sich aus dem Graph von  $g$  durch Stauchung um  $a$  in Abszissenrichtung.
  - c)  $V(x) = x + a$ ,  $V(f(x)) = f(x) + a =: \tilde{f}(x)$ . Der Graph von  $\tilde{f}$  ergibt sich aus dem Graph von  $f$  durch Verschiebung um  $a$  in *Ordinatenrichtung*.
  - d)  $s(x) = ax$ ,  $s(f(x)) = af(x) =: \tilde{f}(x)$ . Der Graph von  $\tilde{f}$  ergibt sich aus dem Graph von  $f$  durch Streckung um  $a$  in Ordinatenrichtung.

- Weiter Beispiele:

a)

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 - gt \\E(v) &= \frac{1}{2}mv^2 \\E(v(t)) &= \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2 \\&= \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2 \\&= (E \circ v)(t) =: \tilde{E}(t)\end{aligned}$$

Übliche, aber formal nicht korrekte Schreibweise:  $E(t)$ , also gleiche Bezeichnung für die Verkettung und äußere Funktion ( $E(t)$  wäre ja  $\frac{1}{2}mt^2$ , was physikalisch keinen Sinn ergibt).

b)

$$\begin{aligned}x(t) &= a \sin(\omega t + \phi) \\E(x) &= \frac{1}{2}kx^2 \\E(x(t)) &= \frac{1}{2}ka^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\&= (E \circ x)(t) =: \tilde{E}(t)\end{aligned}$$

## 3.5 Gängige Funktionen

### 3.5.1 Polynomfunktionen

- Als *Polynomfunktion* vom Grad  $n \in \mathbb{N}_0$  bezeichnet man eine reelle Funktion einer Variablen mit einer Zuordnungsvorschrift der Form

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_n \neq 0.$$

Zusätzlich wird die Funktion mit  $P(x) = 0$  als Nullpolynom bezeichnet.

Funktionswerte werden allein mit Summen und Produkten berechnet (s. auch Horner-Schema).

- Die Existenz und Anzahl von Nullstellen wurde bereits bei den komplexen Zahlen behandelt.
- Für  $n = 2$  können Nullstellen über *quadratische Ergänzung* oder gleichbedeutend über die Mitternachtsformel bzw.  $p, q$ - oder  $a, b, c$ -Formel bestimmt werden. Für  $n > 4$  gibt es keine allgemeinen Lösungsformeln. Eventuell kann eine Nullstelle  $x_k$  geraten werden (wobei der *Satz über rationale Nullstellen* helfen kann). Dann kann  $P_n$  zu  $P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - x_k)$  *faktorisieren* werden, mit einem Polynom  $Q_{n-1}$  vom Grad  $n - 1$ .
- Die Berechnung von  $Q_{n-1}$  erfolgt über *Polynomdivision*. Im Bereich der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist die vollständige Zerlegung in *Linearfaktoren*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n \prod_{k=0}^n (x - x_k) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

stets möglich. Die Anzahl des Auftretens einer mehrfachen Nullstelle wird ihre *Vielfachheit* genannt.

### 3.5.2 Rationale Funktionen

- Aus zwei Polynomfunktionen kann eine *rationale Funktion* konstruiert werden, indem die rechte Seite der Zuordnungsvorschrift des einen Polynoms als Zähler und die des anderen Polynoms als Nenner genommen wird:

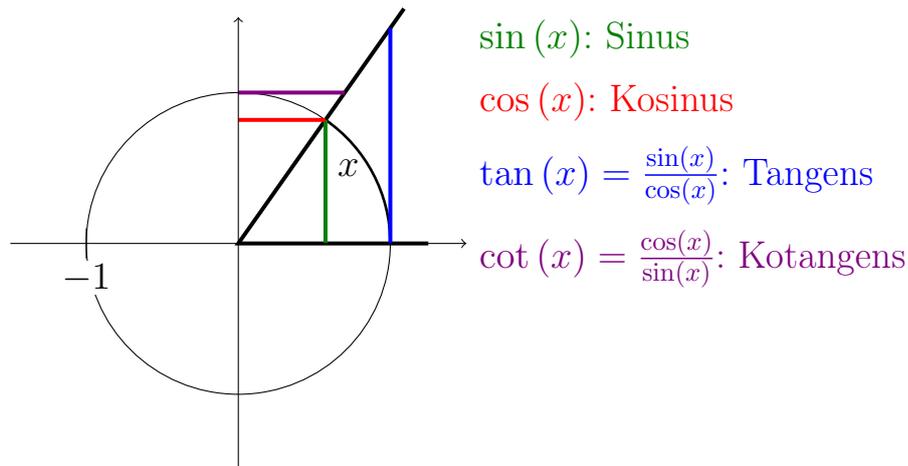
$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Der maximale Definitionsbereich der rationalen Funktion sind die reellen Zahlen ohne die Nullstellen des Nennerpolynoms.

- Eine *hebbare Definitionslücke* liegt vor, falls eine  $k$ -fache Nullstelle des Nennerpolynoms auch mindestens eine  $k$ -fache Nullstelle des Zählerpolynoms ist. Andernfalls spricht man von einer *Polstelle*. Natürlich kann das Nennerpolynom auch keine Nullstellen in  $\mathbb{R}$  haben, z. B.  $1 + x^2$ .

### 3.5.3 Trigonometrische Funktionen

- Aus der Lage von Sinus und Kosinus im Einheitskreis ergibt sich nach Pythagoras



$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1^2$$

Häufig wird auf die Klammern verzichtet:  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  oder auch  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Im zweiten Fall muss klar sein, was zum Argument der trigonometrischen Funktion gehört.

- Periodizität:

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Hierbei ist wie in der Mathematik und Physik üblich das *Bogenmaß* als *Winkelmaß* zu verwenden.

- Aus den Symmetrieeigenschaften

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{punktsymmetrischer Graph}$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{achsensymmetrischer Graph}$$

ergeben sich mit der Eulerformel die Schreibweisen

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

- Durch eine geeignete Verschiebung der Funktionsgraphen in Abszissenrichtung können die Funktionsgraphen von Sinus und Kosinus überlagert werden. Damit gelten die Verkettungen

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

Aus der Rolle von Sinus und Kosinus als Gegenkathete und Ankathete im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse der Länge eins ergeben sich mit der Summe der Innenwinkel im Dreieck von  $\pi$  die Zusammenhänge

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

- **Zwischenaufgabe:** Überführen Sie die angegebenen Zusammenhänge ineinander, indem Sie zusätzlich

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

verwenden.

- Die Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

sollten gekannt sein. Bei Unsicherheit können sie durch Anwendung der Eulerformel auf die drei Exponentialfunktionen in der Rechenregel

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

und Vergleich von Real- und Imaginärteil gewonnen werden. Bei Ersetzung von  $y$  durch  $-y$  können die genannten Symmetrien genutzt werden. In Umrechnungen tritt häufig der Spezialfall  $y = x$  auf.

- Die Umkehrfunktionen werden als *Arkusfunktionen* bezeichnet. Das Bild ergibt sich durch geeignete Einschränkungen der Definitionsbereiche von Sinus und Kosinus, um bijektive Funktionen zu erhalten:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Hinweis: Für  $n \neq -1$  wird oft  $f^n(x)$  als  $(f(x))^n$  interpretiert, für  $n = -1$  als Umkehrfunktion. Diese Mehrdeutigkeit kann bei den trigonometrischen Funktionen durch die Verwendung der Bezeichnungen arcsin etc. vermieden werden.

- Für spezielle Werte kann das Merkschema

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
Hinweise		halbe Basis im gleichseitigen Dreieck	gleichschenkeliges Dreieck	Höhe im gleichseitigen Dreieck	

verwendet werden.

- **Zwischenaufgabe:** Ergänzen Sie die Tabelle um die Zeilen für den Kosinus, den Tangens ( $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ) und den Kotangens ( $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ ).
- Als Beispiel für weitere Funktionen, die ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen aufweisen, seien die Hyperbelfunktionen

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

genannt.

### 3.5.4 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

- Der Ausdruck

$$b^p$$

kann durch Variation der *Basis*  $b$  als *Potenzfunktion*  $x \mapsto x^p$  oder durch Variation des *Exponenten*  $p$  als *Exponentialfunktion*  $x \mapsto b^x$  aufgefasst werden. Im Bereich der reellen Zahlen gelten die Einschränkungen:

- Bei einem negativen Exponenten darf nicht durch null geteilt werden.
- Bei nicht ganzen Exponenten darf keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden.

- Für rationale Exponenten lautet der Zusammenhang mit der Wurzel

$$b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n}.$$

- Beispiel: Isentropengleichung  $pV^\kappa = \text{const}$  mit Isentropenexponenten  $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$  liefert für  $f = 3$  den Zusammenhang

$$p(V) = \text{const} \cdot V^{-\frac{5}{3}}.$$

Damit darf  $V$  weder null noch negativ sein.

- Für positive  $x$  und  $y$  gelten die Rechenregeln

$$x^{p+q} = x^p x^q,$$

$$(xy)^p = x^p y^p,$$

$$(x^p)^q = x^{pq}.$$

- Mit  $f^{-1}(f(x)) = x$  und der letzten Rechenregel erhält man zu der Potenzfunktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \mapsto f(x) = x^p$$

die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \mapsto f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p}}.$$

Für den Spezialfall  $p = \pm 1$  gilt  $f = f^{-1}$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  für  $p = 1$  bzw.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  für  $p = -1$ .

- Hinweis: Für ungerade Exponenten können negative Zahlen hinzugenommen werden, indem die Betrags- und Signumfunktion in der Zuordnungsvorschrift verwendet werden:

$$f^{-1}(x) = \text{sign}(x)|x|^{\frac{1}{p}}.$$

Für positive Exponenten kann die Null hinzugenommen werden.

- Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), x \mapsto f(x) = b^x \quad \text{mit} \quad b > 0$$

wird als *Logarithmusfunktion* bezeichnet:

$$f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f^{-1}(x) = \log_b(x).$$

- Als *natürlicher Logarithmus*  $\ln$  wird der Logarithmus mit der Eulerschen Zahl  $e$  als Basis bezeichnet. Der Logarithmus zur Basis  $b$  kann gemäß

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

in den natürlichen Logarithmus umgerechnet werden. Weiterhin gilt

$$b^x = e^{x \ln(b)},$$

was mit den Rechenregeln folgt, wenn auf der linken Seite  $b$  als  $e^{\ln b}$  geschrieben wird.

- **Zwischenaufgabe:** Bei den beiden vorangehenden Gleichungen liefert Einsetzen bei den linken Seiten definitionsgemäß  $\log_b(b^x) = x$ . Zeigen Sie durch analoges Einsetzen mit den rechten Seiten die Richtigkeit der Umrechnung.
- Rechenregel: für positive  $x$  und  $y$  gilt:

$$\log_b(x^m y^n) = m \log_b(x) + n \log_b(y).$$

Häufiger Spezialfall:  $m = 1$  und  $n = -1$ .

# Analysis

## 4 Funktionen mehrerer Variablen

### 4.1 Kartesisches Produkt

- Aus zwei Mengen  $A$  und  $B$  kann als neue Menge die Menge aller *geordneten Paare*  $(a, b)$  mit  $a$  aus  $A$  und  $b$  aus  $B$  gebildet werden, das *kartesische Produkt*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

- Beispiele:
  - a) Die geordneten Koordinatenpaare (oder 2-Tupel) von Punkten in der Ebene sind Elemente des  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ .
  - b) Die geordneten Koordinatentripel (oder 3-Tupel) von Punkten im Raum sind Elemente des  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^3$ .
  - c) Vektoren wie Geschwindigkeit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  oder Kraft  $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$  sind Elemente des  $\mathbb{R}^3$ .

Hinweis: Obiges gilt bei physikalischen Größen für die Zahlenwerte, die Einheiten sind stets zu beachten!

### 4.2 Funktionen mehrerer Variablen

- Wir betrachten *Funktionen mehrerer Variablen*, die  $m$ -Tupel reeller Zahlen auf  $n$ -Tupel reeller Zahlen abbilden:

$$\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad D \subseteq \mathbb{R}^m.$$

- Beispiele:
  - a) Topographie eines (hypothetischen) Hügels, etwa

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto h(x, y) = \frac{H}{1 + \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2}$$

Die Darstellung kann mit Falschfarben oder Höhenlinien, auch Isolinien genannt, erfolgen. Computerprogramme bieten die Möglichkeit, z. B. Ansichten aus unterschiedlichen Richtungen auf Gitternetzmodelle zu erzeugen.

Hinweis:  $n$ -Tupel werden oft als Spaltenvektoren geschrieben, oder, gleichbedeutend, als transponierte Zeilenvektoren  $(\dots)^T$ . Bei Funktionsargumenten wird meist auf die inneren Klammern verzichtet, also z. B. für die räumliche Verteilung des Luftdrucks  $p(x, y, z)$  statt  $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$  oder  $p((x, y, z)^T)$ .

b) Windgeschwindigkeit als Funktion des Ortes

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Eine solche Funktion wird als vektorwertige Funktion mehrerer Variablen oder als *Vektorfeld* bezeichnet.

Hinweis: In den Wetternachrichten kommen Darstellungen in der Ebene vor, bei denen an ausgewählten Orten ebene Vektoren (Projektionen) eingezeichnet sind.

c) Windgeschwindigkeit als Funktion des Ortes und der Zeit  $t$ :

$$\vec{v} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z, t)^T \mapsto \vec{v}(x, y, z, t)$$

d) Beispiel einer Gleichung aus der Elektrostatik:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)^T\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y, z)^T \mapsto \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(Hinweis: Potential einer Einheits-Punktladung bei  $\vec{r}_0$ , Vektornorm: s. Abschnitt 7.3)

- Viele Variablen bedeuten sowohl analytisch als auch numerisch eine hohe Komplexität. Oft gelingt es, aussagekräftige Modelle mit einer reduzierten Anzahl von Variablen aufzustellen.

## 4.3 Polynome in mehreren Variablen

- Ein Polynom in  $m$  Variablen mit (Total-) Grad  $n$  (s.u.)

$$P_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

ist wie ein reelles Polynom einer Variablen aus Summen von Produkten von Koeffizienten und Variablen aufgebaut.

- Beispiele: Die Temperaturverteilung in der Umgebung des Ursprungs eines dreidimensionalen Koordinatensystems soll, statt durch Angabe von Werten an ausgewählten Orten, analytisch durch ein Polynom beschrieben werden.
  - a) Einfachste Beschreibung als konstante Funktion mit der im Ursprung herrschenden Temperatur  $T$ :

$$T_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z)^T \mapsto T.$$

- b) Polynom mit Grad 1, entsprechend einer Ausgleichsgerade in jeder Raumrichtung:

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z)^T \mapsto T + G_x x + G_y y + G_z z.$$

Sind die Zahlenwerte für  $x, y$  und  $z$  in Metern gegeben, so haben die Koeffizienten  $G_\alpha$  mit  $\alpha \in \{x, y, z\}$  die Einheit Kelvin pro Meter,  $\frac{\text{K}}{\text{m}}$ .

- c) Polynom mit Grad 2:

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y, z)^T \mapsto T + G_x x + G_y y + G_z z \\ + a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2 + a_{zz} z^2 + a_{xy} xy + a_{xz} xz + a_{yx} yz. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_{\alpha\beta}$  mit  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$  haben entsprechend die Einheit Kelvin pro Quadratmeter,  $\frac{\text{K}}{\text{m}^2}$ .

- Hinweis: Bei einem *Monom* mit *Totalgrad*  $n$  werden  $n$  Faktoren aus  $m$  Variablen zusammengestellt. Dabei kann eine Variable mehrfach verwendet werden und die Reihenfolge ist unerheblich. Die Anzahl von Monomen ist demnach gleich der Anzahl von Ereignissen bei dem Urnenmodell mit  $n$  Ziehungen aus  $m$  Kugeln mit Zurücklegen ohne Reihenfolge. Die Anzahl von Elementen dieser Ereignismenge ist  $\binom{m+n-1}{n}$ . Zu dem Grad  $n = 3$  gibt es demnach bei  $m = 3$  Variablen  $\binom{5}{3} = 10$  Monome ( $x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, xz^2, yz^2, xyz$ ). Die Gesamtzahl aller Monome bis zum Grad  $n$  beträgt  $\binom{m+n}{n}$ .

## 4.4 Verkettung von Funktionen mehrerer Variablen

- Bei passenden Definitions- und Bildbereichen kann auch aus zwei vektorwertigen Funktionen durch Verkettung eine neue gebildet werden:

$$\begin{aligned} \vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{und} \quad \vec{h} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ (x_1, \dots, x_m)^T \mapsto \vec{h}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ h_p(\vec{x}) \end{pmatrix} = (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})). \end{aligned}$$

- Beispiel:

Aus der Vogelperspektive betrachtet geht eine Person auf einer Kreisbahn um den Sattelpunkt eines Zeltdaches. Die Kreisbahn als Funktion der Zeit  $t$  kann beschrieben werden durch die vektorwertige Funktion einer Variablen

$$\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}, R \in (0, \infty).$$

In den gleichen Koordinaten kann die Höhe des Zeltdaches durch die *skalare* Funktion zweier Variablen

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto \frac{H_0}{R^2} xy.$$

beschrieben werden (hyperbolisches Paraboloid, vgl. Stapelchips).

Das Auf und Ab der im Kreis gehenden Person wird durch die Verkettung  $h \circ \vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben:

$$h(\vec{f}(t)) = \frac{H_0}{R^2} R \cos(\omega t) R \sin(\omega t) = \frac{1}{2} H_0 \sin(2\omega t).$$

## 4.5 Ergänzung: Darstellungsmöglichkeiten bei mehreren Variablen

- Bei einer Funktion

$$\vec{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)^T \mapsto \vec{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$$

kann man stets in der Definitionsmenge nur eine Komponente als Variabel betrachten und für die anderen feste Werte einsetzen und auch nur eine Komponente der Funktion betrachten, also

$$f_k(c_1, c_2, \dots, x_l, \dots, c_m)$$

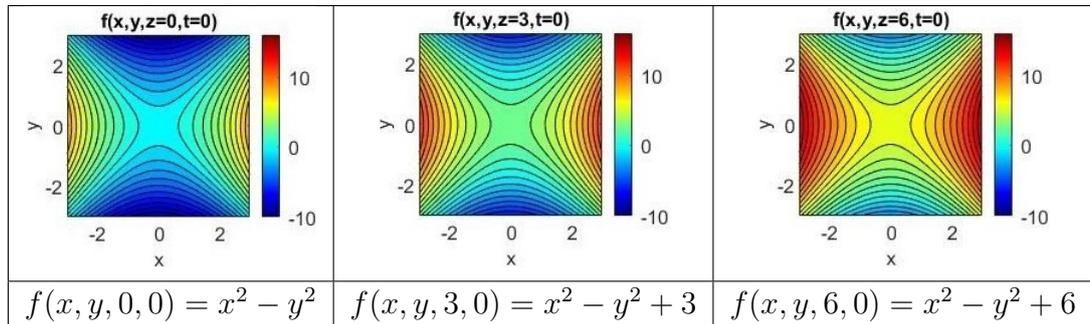
Für eine solche Funktion kann ein Graph wie üblich erstellt werden. Beschränkt man sich auf einen Punkt in der Definitionsmenge für die Wahl der konstanten Werte gibt es  $m \times n$  dieser Graphen.

- Soll die Anzahl der dargestellten Variablen erhöht werden, kann dies mit verschiedenen Tricks in der Zeichenebene oder noch besser auf dem Computerbildschirm erfolgen. Beispiele:

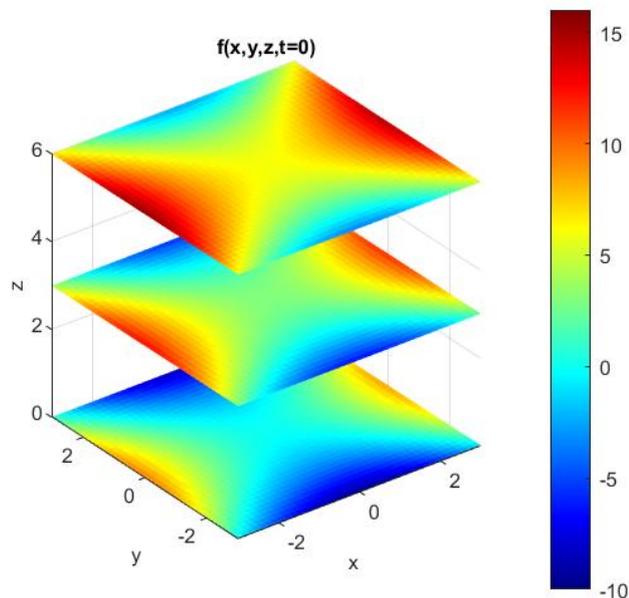
- a)  $f_h(c_1, c_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, c_m)$ , ein 2D-Schnitt, kann mit Isolinien, also der Menge aller Punkte  $(x_i, x_j)$  mit gleichem Funktionswert  $f_h$  oder mit Grauwerten bzw. Falschfarben dargestellt werden. In verschiedenen Schnitten kann eine dritte Variable  $x_k$  variiert werden, am anschaulichsten als Film. Die Schnittebenen können auch schief sein, müssen also keine Koordinatenachsen enthalten.

**Beispiel:** betrachte die Funktion  $f(x, y, z, t) = x^2 - y^2 + z \cdot e^{-t}$ .

**Bilderserie:** Höhenlinien zu verschiedenen  $z$ -Werten mit konstantem  $t = 0$  Wert.

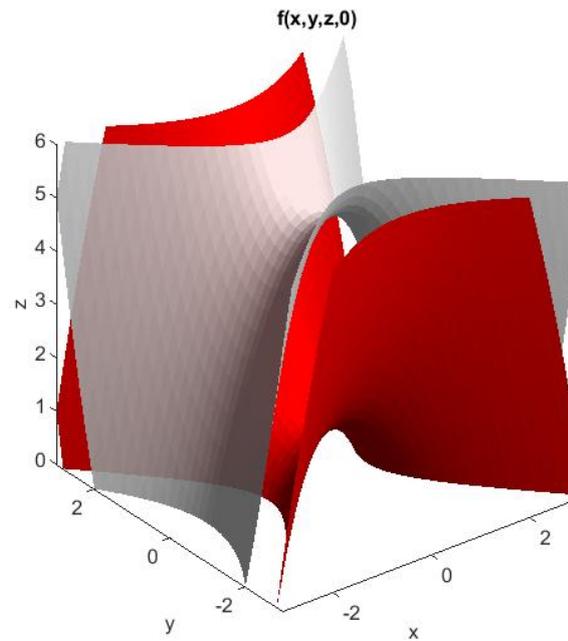


**Schnitte:** Die gleiche Information, dargestellt mit mehreren Schnitten.



- b) Für  $f_h(c_1, c_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, c_m)$  können auch Isoflächen berechnet werden und in Gitternetzmodelle umgesetzt werden. Diese können aus verschiedenen Richtungen dargestellt werden, am anschaulichsten interaktiv am Computer.

**Isoflächen:** Das vorherige Beispiel, dargestellt mit Isoflächen (rot:  $f(x, y, z, 0) = x^2 - y^2 + z = 1$ , grau:  $f(x, y, z, 0) = x^2 - y^2 + z = 5$ ):



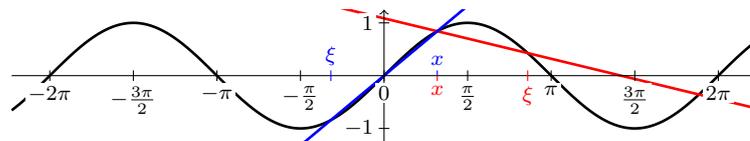
- Neben Schnitten können auch Projektionen auf eine Achse oder in eine Ebene dargestellt werden, also z. B. die Wassermenge in einem Menschen als Funktion der Höhe. Eine andere Möglichkeit ist, nur den maximalen Funktionswert zu projizieren, z. B. den maximalen Betrag der Blutströmungsgeschwindigkeit in die Coronalebene („Vorderansicht“).
- Auf die Möglichkeit, zwei (oder drei) Funktionskomponenten als Pfeile an ausgewählten Punkten darzustellen, wurde bereits oben hingewiesen.

# Analysis

## 5 Differentiation

### 5.1 Kurvensekante

- Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $D = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Zu  $x, \xi = x + h \in D$ ,  $h \neq 0$  ist die *Sekante* die durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(\xi, f(\xi))$  verlaufende Gerade.



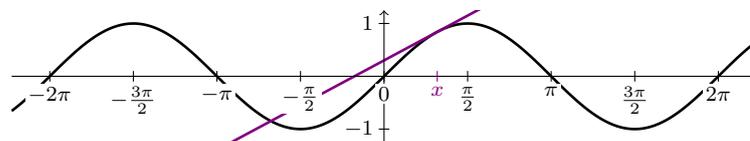
- Die Sekantensteigung ist der *Differenzenquotient*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

(Hinweis: Für den Steigungswinkel gilt  $\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ )

### 5.2 Tangente

- Wenn sich die Sekantensteigung für immer kleinere  $h$  einem festen Wert nähert („Funktionsgrenzwert“), ist  $f$  in  $x$  *differenzierbar* und die Sekantensteigung geht über in die *Tangentensteigung*, genannt *Ableitung*  $f'(x)$  von  $f$  in  $x$  oder  $\frac{d}{dx}f(x)$ .



- Ist  $f$  hinreichend „glatt“, kann aus den Ableitungen in allen Punkten aus  $D$  die *Ableitungsfunktion* gebildet werden und jede Ableitung von  $f$  wieder differenziert werden. Bezeichnungen: 2. Ableitung  $f''(x)$ :

$$f'' = (f')' = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f \right) = \frac{d^2}{dx^2} f.$$

3. Ableitung  $f'''(x)$ :

$$f''' = \frac{d^3}{dx^3} f.$$

$n^{\text{te}}$  Ableitung  $f^{(n)}(x)$ :

$$f^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} f.$$

Alternativ für Zeitableitungen z. B.  $x(t)$ : 1. Ableitung  $\dot{x}(t)$ , 2. Ableitung  $\ddot{x}(t)$ .

### 5.3 Rechenregeln

- Die Ableitung ist *linear*, d. h. für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

- Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Kettenregel:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Bezeichnung: Äußere Ableitung mal innere Ableitung .

- Umkehrfunktion:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

oder

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Hinweis: In der zweiten Form werden die vertauschten Rollen in den Funktionsgraphen ersichtlich.

### 5.4 Wichtige Ableitungen

- Bei Polynomfunktionen:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Diese Regel kann auf reelle Exponenten erweitert werden.

- Exponentialfunktion mit Basis e (natürliche Exponentialfunktion):

$$(e^x)' = e^x.$$

- Logarithmusfunktion mit Basis e (natürlicher Logarithmus):

$$(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}.$$

- Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned}(\sin(x))' &= \cos(x), \\(\cos(x))' &= -\sin(x), \\(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

- *Zwischenaufgabe* Zeigen Sie mit der Regel für Umkehrfunktionen und den Rechenregeln für trigonometrische Funktionen  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- Weitere Standardableitungen: s. 5.8.
- Der maximale Definitionsbereich der Ableitung kann kleiner sein als der maximale Definitionsbereich von  $f$ .

Beispiele:

a)

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} : D = [0, \infty), \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} : D = (0, \infty).$$

b)

$$|x| : D = \mathbb{R}, \quad (|x|)' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} : D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

## 5.5 Extremstellen

- An einer *Extremstelle* in einem offenen Intervall ist notwendigerweise  $f'(x) = 0$ .
- Beispiel für ein Minimum bei  $x = 1$ :

$$f(x) = (x-1)^2, \quad f'(x) = 2(x-1).$$

- Beispiel für ein Maximum bei  $x = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ :

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15, \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 23.$$

- Übersicht Kurvendiskussion: s. 5.8
- Anwendung: Optimierung, s. Aufgabenblatt (Zylinder in Kugel, Energieminimum etc.)

## 5.6 Ableitung bei mehreren Variablen

- Bei einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kann man alle Variablen bis auf eine,  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  als fest betrachten und nach der verbleibenden Variablen ableiten. Das Ergebnis wird *partielle Ableitung* genannt. Schreibweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_i}$$

- Beispiele

a)

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y)^T \mapsto \frac{H_0}{R^2} xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h(x, y) = h_x(x, y) = \frac{H_0}{R^2} y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, y) = h_y(x, y) = \frac{H_0}{R^2} x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} h(x, y) = \frac{H_0}{R^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(x, y) = 0$$

b)

$$s(x, t) = s_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} s(x, t) = s_x(x, t) = s_0 \cos(kx - \omega t) k$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x, t) = s_{xx}(x, t) = -s_0 \sin(kx - \omega t) k^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} s(x, t) = s_t(x, t) = s_0 \cos(kx - \omega t) \omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(x, t) = s_{tt}(x, t) = -s_0 \sin(kx - \omega t) \omega^2$$

- Die  $n$  ersten partiellen Ableitungen können als Spaltenvektor zu dem *Gradienten*  $\text{grad} f$  oder  $\nabla f$  zusammengefasst werden:

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

- Zum Beispiel für  $h(x, y)$  von oben:

$$\nabla h(x, y) = \frac{H_0}{R^2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

- An einer Extremstelle  $\vec{x}_k$  gilt notwendigerweise

$$\nabla f(\vec{x}_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Punkt, an dem der Gradient verschwindet, wird *kritischer Punkt* genannt.

- Bei höheren partiellen Ableitungen können auch gemischte Ableitungen berechnet werden. Bei „gutmütigen“ Funktionen ist die Reihenfolge vertauschbar, also zum Beispiel  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$ . Die verschiedenen zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion mit einer Komponente können in einem quadratischen Schema zu der *Hesse-Matrix*  $H_f$  zusammengefasst werden:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

## 5.7 Taylorreihe

- Unter gewissen Voraussetzungen kann zu einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die *Taylorreihe*

$$P_{f,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k$$

gebildet werden. Dies ist eine Potenzreihe, bei der der  $k$ -te Koeffizient der Quotient aus der  $k$ -ten Ableitung an der *Entwicklungsstelle*  $\xi$  und  $k!$  ist.

- Die Partialsummen der Taylorreihe werden *Taylorpolynome* genannt. Das Taylorpolynom vom Grad null hat als konstanten Wert den Funktionswert an der Entwicklungsstelle. Das Taylorpolynom vom Grad eins ist die Tangente an die Funktion an der Entwicklungsstelle. Das Taylorpolynom vom Grad  $n$  geht durch den Punkt  $(\xi, f(\xi))$  und stimmt dort in allen  $n$  Ableitungen mit den Ableitungen von  $f$  überein.
- Beispiel: Exponentialfunktion an der Entwicklungsstelle null. Bei null sind alle Ableitungen und der Funktionswert eins. Es folgt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Taylornäherungen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{0!}x^0 : 1 \\ \text{mit } & \frac{1}{1!}x^1 = x : 1 + x \\ & \text{mit } \frac{1}{2!}x^2 : 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\ & \text{mit } \frac{1}{3!}x^3 : 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

## 5.8 Standardableitungen und Übersicht Kurvendiskussion

$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkungen
$c$	$0$	$c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \text{ für } n \leq 0)$
$x^\alpha$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x > 0$
$ x $	$\begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln( x )$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}, x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\coth(x)$	$\frac{-1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$

## Vollständige Kurvendiskussion

a) algebraisch-geometrische Betrachtung:

- 1) Maximalen Definitionsbereich bestimmen
- 2) Periodizität angeben
- 3) auf Symmetrie untersuchen
  - gerade Funktion (Achsen-symmetrie zur vertikalen Achse):  $f(-x) = f(x)$
  - ungerade Funktion (Punkt-symmetrie zum Ursprung):  $f(-x) = -f(x)$
- 4) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ermitteln
  - Schnittpunkt mit der vertikalen Achse ( $y$ -Achsenabschnitt):  $(0; f(0))^T$
  - Schnittpunkte  $(x_N; 0)^T$  mit der horizontalen Achse (Nullstellen):  $f(x_N) = 0$
- 5) Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs / Asymptoten betrachten

b) analytische Betrachtung:

- 6) Ableitungen berechnen: erste und zweite, eventuell auch die dritte Ableitung berechnen
- 7) Extrempunkte berechnen
  - stationäre Punkte  $x_E$  von  $f$ :  
 $f'(x_E) = 0$
  - zum Prüfen der Extremaleigenschaft:

– Vorzeichenwechsel in  $f'$  bei  $x_E$ :

von + nach – (Hochpunkt)

von – nach + (Tiefpunkt)

oder, falls  $f''(x_E) \neq 0$  ist,

–  $f''(x_E) < 0$  (Hochpunkt)

$f''(x_E) > 0$  (Tiefpunkt)

- $f(x_E)$  berechnen

8) Monotoniebereiche angeben

9) Wendepunkte berechnen

- stationäre Punkte  $x_W$  von  $f'$ :  $f''(x_W) = 0$

- zum Prüfen, ob es eine Wendestelle ist:

– Vorzeichenwechsel in  $f''$  bei  $x_W$ :

von + nach – (Übergang von Links- nach Rechtskrümmung)

von – nach + (Übergang von Rechts- nach Linkskrümmung)

oder, falls  $f'''(x_W) \neq 0$  ist,

–  $f'''(x_W) < 0$  (Übergang von Links- nach Rechtskrümmung)

$f'''(x_W) > 0$  (Übergang von Rechts- nach Linkskrümmung)

- $f(x_W)$  berechnen

10) Graphen zeichnen

# Analysis

## 6 Integration

### 6.1 Integration und Differentiation

- Die Integration kann als Umkehroperation der Differentiation aufgefasst werden:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

und

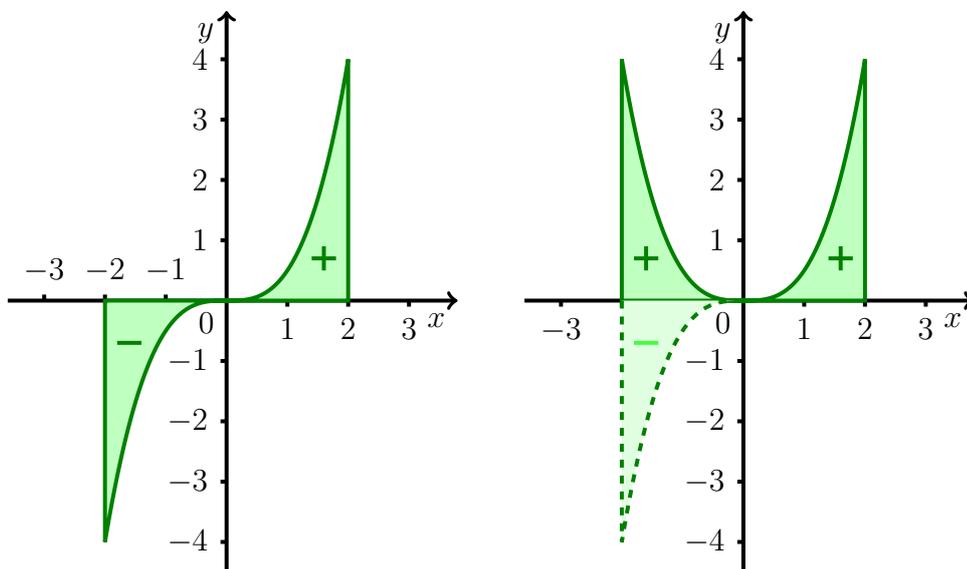
$$f(x) = \frac{d}{dx} \left[ c + \int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} \right]$$

mit  $a, c \in \mathbb{R}$ . In  $\int_a^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}$  heißt  $a$  *Untergrenze* des Integrals,  $x$  *Obergrenze* des Integrals,  $f$  *Integrand* und  $\tilde{x}$  *Integrationsvariable*.

### 6.2 Stammfunktionen

- Eine Funktion  $F(x)$  mit  $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$  heißt *Stammfunktion* von  $f(x)$ .
- Zwei Stammfunktionen  $F(x)$ ,  $G(x)$  einer Funktion  $f(x)$  können sich nur um eine Konstante unterscheiden:  $F(x) = G(x) + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .
- Hinweis: Die vorzeichenbehaftete Fläche zwischen der Abszisse und dem Funktionsgraphen von  $f$  im Intervall  $[a, b]$  kann mit  $F(b) - F(a)$  berechnet werden. Die Flächenberechnung wird damit zurückgeführt auf die Berechnung von Stammfunktionen.

Beispiel: Fläche für die Graphen von  $\frac{1}{2}x^3$  (links) bzw.  $|\frac{1}{2}x^3|$  (rechts):



## 6.3 Integrieren

- Trotz der Verwandtschaft zur Differentiation ist das Auffinden einer Stammfunktion, genannt *Integrieren*, in der Praxis schwieriger als die Berechnung einer Ableitung:

„Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren ist eine Kunst“.

- Wegen der frei wählbaren Integrationskonstante wird das Auffinden einer Stammfunktion als *unbestimmte* Integration bezeichnet. Schreibweise:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

- Aus einer Stammfunktion berechnet sich das *bestimmte* Integral zu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

- Wie bei der Differentiation liefert die *Linearität* eine wichtige Rechenregel:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

## 6.4 Wichtige Integrale

$$\begin{aligned}\int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln(|x|) + c \\ \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + c \\ \int \cos(x) dx &= \sin(x) + c \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) + c \\ \int (1 + (\tan(x))^2) dx &= \tan(x) + c \\ \int e^x dx &= e^x + c\end{aligned}$$

etc.

## 6.5 Partielle Integration

- Bei der Differentiation lautet die Produktregel

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integration auf beiden Seiten und Anwenden der Linearität liefert

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Aufgelöst nach einem Summanden wird die Gleichung als partielle Integration bezeichnet:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

bzw.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Sie wird angewendet, wenn ein Ausdruck vom Typ der linken Seite erkannt wird und durch die rechte Seite berechnet werden kann.

- Beispiele:

a)

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int 1 \cdot \ln(x)dx \\ &= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - x + c \\ &= x(\ln(x) - 1) + c\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x)dx &= x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x)dx \\ &= x^2 \sin(x) - \left\{ 2x(-\cos(x)) - \int 2(-\cos(x))dx \right\} \\ &= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + c \\ &= (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + c\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int (\sin(x))^2 dx &= \int \sin(x) \sin(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) - \int (-\cos(x)) \cos(x) dx \\ &= -\cos(x) \sin(x) + \int (1 - (\sin(x))^2) dx\end{aligned}$$

D.h.

$$\begin{aligned}\int (\sin(x))^2 dx &= -\cos(x) \sin(x) + x + c - \int (\sin(x))^2 dx \\ \Leftrightarrow \int (\sin(x))^2 dx &= \frac{1}{2}(x - \cos(x) \sin(x) + c)\end{aligned}$$

## 6.6 Substitutionsmethode

- Die Kettenregel bei der Differentiation lautet

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Integration auf beiden Seiten liefert als Ausdruck für die Substitutionsmethode:

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

- Häufiger Fall: lineare innere Funktion  $g(x) = ax + b$ , d.h.  $g'(x) = a$ , also

$$\int f'(ax + b) a dx = f(ax + b) + c$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_5^{13} \sqrt{2x-1} dx &= \frac{1}{2} \int_5^{13} \sqrt{2x-1} \cdot 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_5^{13} \\ &= \frac{1}{3} \left( \sqrt{25^3} - \sqrt{9^3} \right) \\ &= \frac{1}{3} (125 - 27) = \frac{98}{3}\end{aligned}$$

Alternativ:

$$g(x) = 2x - 1, \frac{dg}{dx} = 2 \text{ oder } dg = 2dx, g(5) = 9, g(13) = 25$$

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int_9^{25} \sqrt{g} dg = \frac{1}{3} [g^{\frac{3}{2}}]_9^{25}$$

- Häufiger Fall: äußere Funktion

$$f(x) = \ln(|x|) \text{ mit } f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ d.h. } \int \frac{1}{g(x)} g'(x) dx = \ln(|g(x)|) + c.$$

Beispiel:

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(|1+x^2|) + c = \ln(1+x^2) + c$$

- Beispiel mit trigonometrischen Funktionen:

$$\int (\cos(x))^3 \sin(x) dx$$

Für  $g(x) = \cos(x)$  ist  $\frac{dg}{dx} = -\sin(x)$

Substitution:

$$\int \cos^3(x) \sin(x) dx = - \int g^3 dg = -\frac{1}{4} g^4 + c$$

Rücksubstitution:

$$\int \cos^3(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{4} \cos^4(x) + c$$

## 6.7 Schlußbemerkung

- Teilweise führt die Kombination obiger Methoden zum Ziel (z.B. 2x partiell, dann Substitution etc.)
- Oft führen mehrere Wege zum Ziel. Nutzen von Umformungen prüfen (z.B. Additionstheoreme)
- Ergebnis durch Differenzieren überprüfen! Definitionsbereich beachten.
- Rationale Funktionen: Partialbruchzerlegung, s. HM.

# Lineare Algebra

## 7 Vektoren und Vektorräume

### 7.1 Allgemeine Vektorräume

- Eine Menge  $V$  mit einer Addition

$$\oplus : V \times V \rightarrow V$$

und einer Multiplikation mit reellen Zahlen

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

heißt *reeller Vektorraum* (oder Vektorraum über  $\mathbb{R}$ )  $(V, \oplus, \odot)$ , falls für alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  und für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

a)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x} \quad (\text{Kommutativ-Gesetz})$$

b)

$$(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z}) \quad (\text{Assoziativ-Gesetz})$$

c) Es gibt einen Vektor  $\vec{o}$  mit

$$\vec{x} \oplus \vec{o} = \vec{o} \oplus \vec{x} = \vec{x} \quad (\text{neutrales Element})$$

d) Zu jedem  $\vec{x}$  existiert  $-\vec{x}$  mit

$$\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{o} \quad (\text{inverses Element})$$

e)

$$1 \odot \vec{x} = \vec{x} \quad (1\text{-Element})$$

f)

$$\alpha \odot (\beta \odot \vec{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = \beta \odot (\alpha \odot \vec{x})$$

g)

$$(\alpha + \beta) \odot \vec{x} = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}$$

h)

$$\alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \alpha \odot \vec{y}$$

- Analog können auch Vektorräume über komplexe Zahlen eingeführt werden, z.B.  $\mathbb{C}^n$  über  $\mathbb{C}$ .

- Beispiele:

$V = \mathbb{R}$  mit  $\oplus \equiv +$  und  $\odot \equiv \cdot$ ,

$V = \mathbb{C}$  mit  $\oplus$  und  $\odot$  wie am ersten Tag eingeführt,

$V = \mathbb{R}^n$  mit  $\oplus$  und  $\odot$  komponentenweise,

$V =$  Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\oplus$  und  $\odot$  punktweise etc.

- Übliche Schreibweise:

statt  $\odot$  nur  $\cdot$  oder kein Symbol,

statt  $\oplus$  nur  $+$ ,

statt  $\vec{x}$  auch  $\underline{x}$  oder  $\mathbf{x}$  oder nur  $x$  und Bedeutung als Vektor aus dem Kontext.

- $U \subseteq V$  heißt *Untervektorraum* von  $V$ , falls  $U \neq \emptyset$  und für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in U$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\vec{x} + \vec{y} \in U$$

und

$$\lambda \vec{x} \in U.$$

- Die endliche Summe

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{x}_k$$

wird als *Linearkombination* der Vektoren  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  bezeichnet.

## 7.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis

- $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$  heißen *linear unabhängig*, wenn aus

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{o}$$

folgt:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Andernfalls sind die Vektoren *linear abhängig*.

- Ein  $n$ -Tupel

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$$

mit  $\vec{b}_i \in V$  heißt *Basis* von  $V$ , wenn jedes  $\vec{x} \in V$  *eindeutig* als

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{b}_k$$

dargestellt werden kann.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$  heißt *Koordinaten* von  $\vec{x}$  bezüglich der Basis  $B$ .

- Die  $\vec{b}_i$  sind linear unabhängig,  $n$  wird *Dimension* von  $V$  genannt.
- Durch die Festlegung einer Basis wird jedem  $\vec{x} \in V$  die *Koordinatendarstellung*  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$  zugeordnet.
- Der Vektorraum  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  hat die *Standardbasis* mit Basisvektoren  $\vec{e}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , Komponente  $i$  ist eins, andere Komponenten null.

## 7.3 Euklidische Vektorräume

- Eine Abbildung

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

heißt ein *Skalarprodukt*, falls für alle  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

a)

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \quad (\text{Symmetrie})$$

b)

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \\ \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad (\text{Linearität}) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &\geq 0 \quad \text{und} \\ \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \quad (\text{Positive Definitheit}) \end{aligned}$$

- Andere Schreibweise:  $\vec{x} \cdot \vec{y}$
- Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *Euklidischer Vektorraum*.
- Beispiele:

a) Im Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  ist das *Standardskalarprodukt* definiert als

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

b) Im Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  ist mit der Zuordnungsvorschrift

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$$

ein weiteres Skalarprodukt definiert.

- c) Im Vektorraum der auf einem Intervall  $[a, b]$  definierten und integrierbaren Funktionen ist mit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert.

- Mit einem Skalarprodukt lassen sich die *Norm* eines Vektors,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

und der *Abstand* zweier Vektoren,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

definieren.

- Mit der Norm kann der *Winkel*  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in V \setminus \{\vec{0}\}$  definiert werden:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \quad \text{und} \quad \alpha \in [0, \pi]$$

Zwei Vektoren heißen zueinander *orthogonal* wenn ihr Skalarprodukt null ist.

Bei einer *Orthogonalbasis* sind alle Basisvektoren zueinander orthogonal.

## 7.4 Vektorprodukt

- Im Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  ist für den wichtigen Spezialfall  $n = 3$  das *Vektorprodukt*

$$\times : V \times V \rightarrow V, (\vec{x}, \vec{y})^T \mapsto \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

definiert, es ist weder kommutativ noch assoziativ.

## 7.5 Bahnkurve

- Eine vektorwertige reelle Funktion einer Variablen

$$\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

heißt *Bahnkurve*.

- Können die Koordinatenfunktionen  $x_i(t)$  differenziert werden, erhält man mit

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

die Geschwindigkeitsfunktion, welche zu jedem Zeitpunkt Tangenten an die Bahnkurve bildet.

- Der Betrag der Geschwindigkeit ist  $\left\| \frac{d}{dt}\vec{x} \right\|$ .

# Lineare Algebra

## 8 Matrizen

### 8.1 Definitionen und Vektorraumeigenschaft

- Ein Spaltenvektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$  hat seine Komponenten in einer Spalte, der Index

bezeichnet die Zeile:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Das Schema kann durch Hinzufügen von weiteren Spalten gleicher Länge zu einer rechteckigen *Matrix* erweitert werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij}).$$

In der letzten Schreibweise kann  $(a_{ij})$  noch mit einer Angabe der Zeilen- und Spaltenzahl, etwa  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$  indiziert werden.

- Schreibweise für die Menge aller reellen  $(m \times n)$ -Matrizen:

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Merkregel für die Reihenfolge der Indizes: Zeile zuerst, Spalte später.

- Die *Summe* zweier Matrizen  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist *komponentenweise* definiert:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Die Addition reeller  $(m \times n)$ -Matrizen ist *kommutativ* und *assoziativ*, das neutrale Element ist die  $(m \times n)$ -Nullmatrix  $O$  mit  $o_{ij} = 0$  für  $(i, j) \in$

$\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  und das inverse Element von  $(a_{ij})$  ist  $(-a_{ij})$ :

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ (A + B) + C &= A + (B + C), \\ A + O &= O + A = A, \\ A + (-A) &= O. \end{aligned}$$

*Hinweis: Das inverse Element bezüglich der Matrixaddition ist nicht mit der inversen Matrix, s. Abschnitt 8.3 zu verwechseln, so wie bei Zahlen das inverse Element bezüglich der Addition nicht zu verwechseln ist mit dem inversen Element bezüglich der Multiplikation.*

- Die *skalare Multiplikation* einer Matrix  $(a_{ij})$  mit einer Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist ebenfalls komponentenweise definiert:  $\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$ .
- Damit bildet  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$  einen reellen Vektorraum.
- Durch Vertauschen von Spalten und Zeilen wird die *transponierte* Matrix konstruiert:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ A^\top &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $(A^\top)^\top = A$ ,  
 $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ ,  $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$ .

## 8.2 Matrixmultiplikation

- Aus einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times l}$  und einer Matrix  $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$  kann durch *Matrixmultiplikation* eine Matrix  $A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  konstruiert werden. Die Komponenten  $c_{ij}$  von  $C = (c_{ij})$  ist das Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von A mit der  $j$ -ten Spalte von B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}.$$

- Beispiele

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \sigma_x \cdot \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \sigma_z \cdot \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\sigma_x \cdot \sigma_z)^\top \neq \sigma_x \cdot \sigma_z$$

- Die Matrixmultiplikation ist also nicht kommutativ, sie ist aber assoziativ:

$$AB \neq BA,$$

$$(AB)C = A(BC).$$

- Es gilt

$$(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top.$$

### 8.3 Inverse Matrix

- Für die Menge der *quadratischen Matrizen*  $\mathbb{R}^{n \times n}$  wird die *Einheitsmatrix*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

definiert. Es gilt für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *invertierbar* oder *regulär*, wenn die *inverse Matrix*  $A^{-1}$  existiert mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Andernfalls heißt  $A$  *singulär*.

- Für reguläre Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

und

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

- Um die Inverse zu berechnen, kann der *Gauß-Jordan-Algorithmus* (GJA) auf die *Blockmatrix*  $(A|I_n)$  angewendet werden. Durch Anwendung von *elementaren Zeilenumformungen* (EZU) wird die linke Hälfte der Blockmatrix möglichst zu  $I_n$  umgeformt.

Schematisch:

$$(A|I_n) \xrightarrow{\text{Gauß}} (I_n|A^{-1})$$

Gelingt dies nicht, treten in der linken Hälfte Nullzeilen auf. Die Anzahl von Zeilen i. d. linken Hälfte, die nicht zu null gemacht werden können, heißt *Rang* von  $A$ .

Die EZU sind

- a) Vertauschung zweier Zeilen,
- b) Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda \neq 0$ ,
- c) Addition einer Zeile mit einer anderen Zeile.

Beschreibung des GJA in Worten:

Wiederhole für alle Diagonalelemente, beginnend bei  $a_{11}$

- a) Falls Diagonalelement  $a_{ii} \neq 0$  :  
 teile Zeile  $i$  durch  $a_{ii}$ ,  
 sonst, wenn möglich Zeilentausch, damit neues Diagonalelement nicht null ist.
- b) Addiere jeweils das Vielfache der betrachteten Zeile ggf. zu den Zeilen oberhalb und ggf. zu den Zeilen unterhalb, so dass die Spalte  $i$  mit dem Diagonalelement bis auf das Diagonalelement nur Nullen enthält.

Tritt vor Erreichen von  $i = n$  eine Nullzeile auf, kann die Zeile nicht durch das Diagonalelement geteilt werden, für den Rang  $r$  gilt  $r < n$  und die Matrix ist nicht invertierbar.

- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Blockmatrix:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(erste Zeile mit  $\frac{1}{3}$  multiplizieren)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(addiere das  $(-1)$ -Fache der erste Zeile zu der zweiten und dritten Zeile)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(zweite Zeile mit 3 multiplizieren)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(addiere das  $-\frac{2}{3}$ -Fache der zweite Zeile zur ersten Zeile und das  $\frac{2}{3}$ -Fache der zweite Zeile zur dritten Zeile)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

(addiere das  $-2$ -Fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile)

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ:  $a_{31}$  als erstes Pivot-Element,  $a_{22}$  als zweites Pivot-Element, am Schluss Zeilen tauschen.

Nachrechnen:  $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$ .

- Wie man leicht nachrechnen kann ist

$$\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = I_2,$$

also gilt

$$\sigma_x^{-1} = \sigma_x$$

und

$$\sigma_z^{-1} = \sigma_z.$$

## 8.4 Weiteres zu quadratischen Matrizen

- Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A^\top = A$  heißt *symmetrisch*.

Beispiel:  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  sind symmetrisch. Das Ergebnis der Multiplikationen zeigte  $\sigma_x \sigma_z = (\sigma_z \sigma_x)^\top$ . Dies folgt auch aus den Rechenregeln und der Symmetrie:

$$(\sigma_z \sigma_x)^\top \underset{\text{Rechenregel}}{=} \sigma_x^\top \sigma_z^\top \underset{\text{Symmetrie}}{=} \sigma_x \sigma_z$$

- Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A^\top A = AA^\top = I_n$  heißt *orthogonal*, d.h.  $A^\top = A^{-1}$ .

Beispiel: Wie bereits gezeigt gilt  $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$ ,  $\sigma_z^{-1} = \sigma_z$  und  $\sigma_x^\top = \sigma_x$ ,  $\sigma_z^\top = \sigma_z$ . Damit sind  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  orthogonal.

- Die *Spur* einer quadratischen Matrix ist die Summe der *Diagonalelemente*:

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Es gilt  $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ .

Beispiel:  $\text{Spur}(\sigma_x) = \text{Spur}(\sigma_z) = 0$

## 8.5 Determinante

- Für quadratische Matrizen kann die *Determinante* berechnet werden, die später bei der Berechnung von Eigenwerten verwendet wird.
- Die Determinante einer Matrix  $A = (a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  ist  $\det(A) = |A| = a$ . Die Schreibweise mit senkrechten Strichen ist bequem, wobei diese auch mit anderen Bedeutungen verwendet werden.
- Die Determinante einer Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist  $|A| = ad - bc$ .
- Die Determinante einer Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n \geq 3$  kann schrittweise mit der Laplaceschen Entwicklungsformel berechnet werden. Entwicklung nach Zeile  $i$ ,

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

oder nach Spalte  $j$ ,

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Dabei bezeichnet  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  die Matrix, die sich aus  $A$  durch Streichen der Zeile  $i$  und der Spalte  $j$  ergibt.

- Beispiel!

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \ln(\pi) & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & \cos(e^2) & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \stackrel{\text{3. Zeile}}{=} (-1)^4 \cdot 0 \begin{vmatrix} \ln(\pi) & \sqrt{7} \\ \cos(e^2) & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 1 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^6 \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & \ln(\pi) \\ \sqrt{7} & \cos(e^2) \end{vmatrix} \\ & = -2(1 - 7) = 12 \end{aligned}$$

- Wie man leicht nachrechnen kann ist  $|\sigma_x| = |\sigma_z| = -1$ .
- Für  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt
  - a)  $|AB| = |A| \cdot |B|$
  - b)  $|A^\top| = |A|$
  - c) Es gilt die wichtige Äquivalenz

$$A \text{ regulär} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

oder gleichbedeutend

$$A \text{ singular} \Leftrightarrow |A| = 0$$

d) Für reguläre  $A$  gilt  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

- Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addiert wird oder das Vielfache einer Spalte zu einer anderen. Dies kann dazu genutzt werden, um in einer Zeile oder Spalte für die Entwicklung Nullen zu erzeugen. Sind Parameter in der Matrix enthalten, können diese allerdings dabei weiter über die Matrix verteilt und die Rechnung komplizierter werden.

# Lineare Algebra

## 9 Lineare Gleichungssysteme

### 9.1 Schreibweise und Bezeichnungen

- Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit  $n$  Unbekannten und  $m$  Gleichungen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

kann mit dem Matrixprodukt als Gleichung

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

geschrieben werden.  $A = (a_{ij})$  ist die *Koeffizientenmatrix*, der Vektor  $\vec{x}$  hat als  $i$ -te Komponente die Unbekannte  $x_i$ , der Vektor  $\vec{y}$  hat als  $i$ -te Komponente die rechte Seite der Gleichung  $i$ . Es ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$ ,  $A\vec{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1} = \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ .

Die Multiplikation der Matrix  $A$  mit dem Vektor  $\vec{x}$  führt auf einen Spaltenvektor, dessen Komponenten gerade die jeweiligen linken Seiten in dem obigen LGS sind (nachrechnen!). Dieser Vektor ist gleich dem Vektor  $\vec{y}$ , falls jeweils alle Komponenten gleich sind, was gleichbedeutend mit dem LGS ist.

- Hinzufügen der rechten Seite zu der Koeffizientenmatrix liefert die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$(A|\vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix kann als Kurzschreibweise des sortierten LGS aufgefasst werden: Die Pluszeichen und die Unbekannten  $x_i$  sind weggelassen und der senkrechte Strich ersetzt die Gleichheitszeichen.

- Die *Lösungsmenge* des LGS ist die Menge aller  $n$ -Tupel, die jeweils alle  $m$  Gleichungen erfüllen:

$$L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{y}\}.$$

- Ersetzen der rechten Seite durch den Nullvektor  $\vec{o} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  führt auf das zugehörige *homogene* LGS mit Lösungsmenge

$$L_h = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{o}\}.$$

Für  $\vec{y} \neq \vec{o}$  heißt das LGS *inhomogen*.

## 9.2 Lösungsmenge und Gauß-Algorithmus

- Für alle  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt  $\vec{o} \in L_h$ .
- Die EZU ändern die Lösungsmenge des LGS nicht. Mit dem Gauß-Algorithmus wird  $(A|\vec{y})$  auf *Stufenform* gebracht. Dies entspricht einem systematischen Additionsverfahren zum Lösen des LGS.
- Allgemein ist der *Rang* einer Matrix die Anzahl von Zeilen in der Stufenform, die keine Nullzeilen sind.
- Ist der Rang von  $(A|\vec{y})$  größer als der Rang von  $A$ , so gilt  $L = \emptyset$ , leere Menge.

Erklärung:

Kommt durch die rechte Seite eine Nicht-Nullzeile hinzu, ist bei der entsprechenden Gleichung die linke Seite null und die rechte Seite ungleich null.

Weiterhin können die  $n$  Spalten von  $A$  als  $n$  Spaltenvektoren  $\vec{a}_i$  geschrieben werden. Das LGS lässt sich dann auch als  $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{y}$  schreiben, d.h.  $\vec{y}$  muß als Linearkombination der Spaltenvektoren von  $A$  darstellbar sein. Bei ungleichem Rang ist dies nicht möglich.

- Andernfalls ist der Rang von  $(A|\vec{y})$  gleich dem Rang von  $A$  und das LGS ist lösbar.
- Ist der gemeinsame Rang gleich der Anzahl der Unbekannten  $n$ , so ist die Lösung eindeutig. Eine quadratische Koeffizienten-Matrix (d.h. keine „überflüssigen“ Nullzeilen in  $(A|\vec{y})$  in Stufenform) ist dann regulär und

$$A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

- Ist der gemeinsame Rang  $r$  kleiner  $n$ , so ist  $L_h$  ein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  mit der Dimension  $n - r$ :

$$A\vec{u} = \vec{o} \Rightarrow A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u} = \lambda\vec{o} = \vec{o}$$

$$\text{mit } A\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}$$

also sind mit  $\vec{u} \in L_h$  und  $\vec{v} \in L_h$  auch  $\lambda\vec{u} \in L_h$  und  $\vec{u} + \vec{v} \in L_h$ .

Ist  $\vec{x}_p$  eine spezielle Lösung von  $A\vec{x}_p = \vec{y}$ , gilt  $L = \vec{x}_p + L_h$ ,

$$A(\vec{x}_p + \vec{u}) = A\vec{x}_p + A\vec{u} = \vec{y} + \vec{o} = \vec{y} \text{ für alle } \vec{u} \in L_h.$$

- Bei unendlich vielen Lösungen gibt es für eine oder mehrere Unbekannte in der jeweiligen Spalte keine Stufe. Für diese Unbekannte kann jeweils eine beliebige Zahl eingesetzt werden.

- Die Lösungsmenge wird durch Rückeinsetzen gewonnen, beginnend mit der letzten Stufe. Bei unendlich vielen Lösungen hängen die Unbekannten an den Stufen gegebenenfalls auch von den beliebigen Zahlen ab. Dies wird durch das Betrachten unterschiedlicher Beispiele klarer ...

# Lineare Algebra

## 10 Eigenwerte und -räume

### 10.1 Definition

- Gilt für ein  $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ , ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

so heißt  $\vec{v}$  *Eigenvektor* (EV) und  $\lambda$  *Eigenwert* (EW) von  $A$ . Genauer ist  $\vec{v}$  EV von  $A$  zum EW  $\lambda$ .

Beispiele:

a)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d.h.  $\vec{e}_1$  ist EV zum EW  $\lambda_1$ . Ebenso ist  $\vec{e}_2$  EV zum EW  $\lambda_2$  und  $\vec{e}_3$  EV zum EW  $\lambda_3$ .

b)

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_1$  ist EV zum EW 1,

$\sigma_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2$  ist EV zum EW  $-1$ .

c)

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , kein EV,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , kein EV,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , EV zum EW 1,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ EV zum EW } -1.$$

## 10.2 Bestimmung der EW, charakteristisches Polynom

Aus  $A\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda I_n \vec{v}$  folgt  $A\vec{v} - \lambda I_n \vec{v} = \vec{o}$  und damit

$$(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{o}$$

Ist  $(A - \lambda I_n)$  regulär und damit  $|A - \lambda I_n| \neq 0$ , so ist  $\vec{v} = \vec{o}$  die einzige Lösung. Die Gleichung hat Lösungen  $\neq \vec{o}$ , also Eigenvektoren, wenn  $|A - \lambda I_n| = 0$  gilt. Definition:

$$p_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

heißt *charakteristisches Polynom* von  $A$ . Die EW erhält man also als Nullstellen von  $p_A$ . In  $\mathbb{R}$  hat  $p_A$  maximal  $n$  Nullstellen, in  $\mathbb{C}$  hat  $p_A$   $n$  Nullstellen.

Beispiele:

a)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

mit Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

b)  $|\sigma_z - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)$  mit Nullstellen  
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .

c)  $|\sigma_x - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$  mit Nullstellen  
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ .

## 10.3 Bestimmung der EV

Sind die EW  $\lambda_i$  gefunden, können zugehörige EV  $\vec{v}_i$  als Lösungen der Gleichung  $(A - \lambda_i I_n)\vec{v}_i = \vec{o}$ , die von  $\vec{o}$  verschieden sind, gefunden werden  $\rightarrow$  Gauß-Algorithmus.

Definition:

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{o}\}$$

heißt *Eigenraum* von  $A$  zum EW  $\lambda$ .

Beispiele:

a)  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $\lambda_1 = 1$ : Erweiterte Koeffizientenmatrix zu  $(\sigma_x - \lambda_1 I_n)\vec{v}_1 = \vec{0}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wähle  $c \in \mathbb{C}$  als 2. Komponente  $\Rightarrow$  1. Komponente ist auch  $c$ ,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}$$

- $\lambda_2 = -1$ :  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$E_{-1} = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}$$

b)  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_{I_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$(I_2 - 1 \cdot I_2)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h. beide Komponenten frei wählbar,}$$

$$E_1 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

Hinweis: Bilden die EW eine Basis des  $\mathbb{C}^n$ , so ist  $A$  diagonalisierbar, s. HM.

# Analysis

## 11 Differentialgleichungen

In der Wissenschaft treten häufig Gleichungen auf, die sowohl gesuchte Funktionen als auch deren Ableitungen beinhalten. Diese werden als *Differentialgleichungen* (DGL) bezeichnet.

### 11.1 Beispiele

- Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{F} \left( \frac{d}{dt} \vec{r}(t), \vec{r}(t), t \right).$$

- a) Anwendung freier Fall (z. B. nach schiefem Wurf):

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = m \vec{g}.$$

- b) Anwendung ideales Feder-Masse-Pendel (Harmonischer Oszillator):

$$m \frac{d^2}{dt^2} r(t) = -kr(t).$$

- c) Feder-Masse-Pendel mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung (Konstante mal erster Ableitung) und harmonischer Anregung (rechte Seite):

$$m \frac{d^2}{dt^2} r(t) + \gamma \frac{d}{dt} r(t) + kr(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi_0).$$

In diesen Beispielen tritt nur die Ableitung nach einer Variablen auf (Zeit  $t$ ). Solche Differentialgleichungen werden als *gewöhnliche Differentialgleichungen* bezeichnet.

- Wellengleichung für eine Größe  $u$  in Raum  $(x_1, x_2, x_3)$  und Zeit  $(t)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_1, x_2, x_3, t) - c^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, x_3, t).$$

Für nur eine Raumdimension,  $x$ , ohne Anregung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0,$$

mit allgemeiner Lösung

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

- Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur  $u$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, x_3, t) - a \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, x_3, t).$$

- Bei der Wellen- und Wärmeleitungsgleichung treten Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen auf (Ort und Zeit). Solche Differentialgleichungen werden als *partielle Differentialgleichungen* bezeichnet. Weiter Beispiele für partielle Differentialgleichungen: Schrödingergleichung, Maxwell-Gleichungen, Navier-Stokes-Gleichungen etc.
- Systeme von Differentialgleichungen

- a) Auslenkungen  $\theta_i(t)$  zweier Faden-Pendel der Länge  $L$ , die durch eine Feder der Härte  $k$  gekoppelt sind, in der Kleinwinkelnäherung:

$$\begin{aligned} mL \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) &= -mg\theta_1(t) + kL(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \\ mL \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) &= -mg\theta_2(t) - kL(\theta_2(t) - \theta_1(t)). \end{aligned}$$

- b) Reaktionskinetik 1. Ordnung für einen Zerfall  $A \rightarrow B \rightarrow C$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(t) &= -k_A a(t) \\ \frac{d}{dt} b(t) &= k_A a(t) - k_B b(t) \\ \frac{d}{dt} c(t) &= k_B b(t). \end{aligned}$$

Hierbei wird die diskrete Menge an Stoff  $A$  durch die kontinuierliche Funktion  $a(t)$  genähert, entsprechend für  $B$  und  $C$ .

- c) Räuber-Beute-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Beute: } \frac{d}{dt} N_1(t) &= N_1(t)(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2(t)) \\ \text{Räuber: } \frac{d}{dt} N_2(t) &= -N_2(t)(\epsilon_2 - \gamma_2 N_1(t)) \quad \text{mit } \epsilon_i, \gamma_i > 0. \end{aligned}$$

## 11.2 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

- Besonders einfach sind gewöhnliche Differentialgleichungen (oder Systeme davon), in denen die Funktion(en) und ihre Ableitungen nur linear auftreten:

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} r(t) = f(t).$$

Hier wurde  $t$  als Bezeichnung der unabhängigen Variablen gewählt und  $r$  als Bezeichnung der (skalaren) Funktion. Die höchste vorkommende Ableitung  $n$  wird *Ordnung* der Differentialgleichung genannt,  $\frac{d^0}{dt^0} r(t) = r(t)$  ist die Funktion selbst.

Sind die Koeffizienten  $a_k(t)$  Zahlen  $a_k$ , also keine Funktionen, werden sie als *konstante Koeffizienten* bezeichnet.

Die Funktion  $f(t)$  wird als *Inhomogenität* der *inhomogenen* Differentialgleichung bezeichnet, falls sie nicht die Nullfunktion ist.

Ersetzen von  $f(t)$  durch die Nullfunktion führt auf die zugehörige *homogene* Differentialgleichung:

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} r_h(t) = 0.$$

Die Lösungen  $r_h$  der homogenen Differentialgleichung bilden einen Vektorraum der Dimension  $n$ . Eine Basis dieses Vektorraumes aus  $n$  *Fundamentallösungen* wird *Fundamentalsystem* genannt.

Ist  $r_p(t)$  eine spezielle oder partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist die gesamte Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung

$$\{r = r_p + r_h : r_h \text{ löst die homogene Gleichung}\}$$

Die Koeffizienten bei der Linearkombination der Fundamentallösungen können so gewählt werden, dass die Lösung und ihre ersten  $n - 1$  Ableitungen *Anfangswerte* bei  $t = 0$  erfüllen. Das bedeutet, es kann ein Anfangswert  $r(0)$  vorgegeben werden, ebenso eine Anfangssteigung  $y'(0)$  und so weiter, bis zu  $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(0)$ .

- Bei homogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten führt der Ansatz

$$r_h(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

nach Einsetzen in die DGL auf das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$ , welches in ähnlichem Zusammenhang bereits bei der Bestimmung von Eigenwerten aufgetreten ist. Treten  $n$  einfache Nullstellen  $\lambda_i$  auf, kann mit diesen und den Ansätzen  $e^{\lambda_i t}$  ein Fundamentalsystem gebildet werden.

Gibt es keine  $n$  verschiedenen Nullstellen, weil eine Nullstelle  $\lambda_i$  zum Beispiel eine doppelte Nullstelle ist, dann ist neben  $e^{\lambda_i t}$  auch  $t e^{\lambda_i t}$  eine von  $e^{\lambda_i t}$  linear unabhängige Fundamentallösung. Bei dreifachen Nullstellen kommt noch  $t^2 e^{\lambda_i t}$  hinzu etc.

Bei komplexen Nullstellen, die paarweise komplex konjugiert auftreten, also  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  kann für den Imaginärteil die Eulerformel verwendet und durch entsprechende Linearkombinationen ein Fundamentalsystem aus reellen Funktionen erstellt werden, also statt  $c_1 e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt))$  und  $c_2 e^{at} (\cos(-bt) + i \sin(-bt))$  zwei Linearkombinationen der Form  $d_1 e^{at} \cos(bt)$  und  $d_2 e^{at} \sin(bt)$ .

- Bei inhomogenen Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und Lösung  $r_h(t) = ce^{\lambda t}$  des homogenen Systems führt der Ansatz

$$r_p(t) = c(t)e^{\lambda t}$$

auf eine Bestimmungsgleichung für die Funktion  $c'(t)$  und damit auf eine Stammfunktion  $c(t)$  und somit auf eine partikuläre Lösung. Das Verfahren wird „Variation der Konstanten“ genannt und existiert in ähnlicher Form bei variablen Koeffizienten und höherer Ordnung.

- Ist die Inhomogenität bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besonders einfach, kann eine partikuläre Lösung mit dem „Ansatz vom Typ der rechten Seite“ bestimmt werden. Sei etwa  $f(t)$  ein Polynom zweiten Grades, zum Beispiel  $f(t) = 3t^2 + 2t + 1$ . Wird für die partikuläre Lösung ebenfalls ein Polynom zweiten Grades angesetzt,  $r_p(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$ , dann ist auch die Linearkombination von  $r_p$  und den Ableitungen von  $r_p$  ein Polynom zweiten Grades. Die gesuchten Koeffizienten  $c_2$ ,  $c_1$  und  $c_0$  können durch Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite und Lösen des LGS bestimmt werden.

Ähnliches gilt, wenn  $f(t)$  eine komplexe Exponentialfunktion ist (also mit der Euler-Formel eine reelle Exponentialfunktion und / oder trigonometrische Funktionen), die auch mit einem Polynom multipliziert sein kann. Zu beachten ist weiterhin, dass „Resonanz“ auftreten kann, siehe die Vorlesung Höhere Mathematik.

- Schreibt man Systeme von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in Matrixschreibweise

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = A \cdot \vec{r}(t)$$

und hat  $A$ , die Koeffizientenmatrix  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\lambda_i$  und Eigenvektoren  $\vec{v}_i$ , so bilden die Vektoren

$$e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$$

ein Fundamentalsystem.

Hinweis: Alle oben genannten Beispiele sind lineare Differentialgleichungen (gewöhnlich oder partiell), mit Ausnahme der Räuber-Beute-Gleichungen (Terme in  $N_1(t) \cdot N_2(t)$ ).

## 11.3 Ausblick

- Für eine Vielzahl von Typen von Differentialgleichungen wurden Lösungsverfahren entwickelt. In der Praxis werden häufig numerische Näherungsverfahren eingesetzt.

## Beispiel mit Wiederholungen

### 12 Zusammenfassung und Wiederholung an einem Beispiel

- Eine wichtige Folge von Funktionen in der Physik,  $H_n(x)$  mit  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , kann auf verschiedene Weisen angegeben werden.
- Angabe mittels  $n$ -ter *Ableitung*:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Beispiele:

$$n = 0$$

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} e^{-x^2} = 1,$$

$$n = 1$$

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = -e^{x^2} e^{-x^2} (-2x) = 2x.$$

Obwohl diese Angabe die *Exponentialfunktion* verwendet, taucht sie im Endergebnis nicht mehr auf. Dies zeigt sich allgemein in den folgenden beiden möglichen Angaben.

- Angabe mittels Summe, *Fakultäten* und *Potenzfunktionen*:

$$H_n(x) = (-1)^n \sum_{k_1+2k_2=n} \frac{n!}{k_1!k_2!} (-1)^{k_1+k_2} (2x)^{k_1}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Bei den Funktionen  $H_n$  handelt es sich also um *Polynome*. Beispiel:

$n = 2$  mit den Paaren  $k_1 = 0, k_2 = 1$  und  $k_1 = 2, k_2 = 0$

$$H_2(x) = (-1)^2 \left\{ \frac{2}{0!1!} (-1)^{0+1} (2x)^0 + \frac{2}{2!0!} (-1)^{2+0} (2x)^2 \right\} = 4x^2 - 2.$$

- Sind zwei aufeinander folgende  $H_n(x)$  berechnet, können die Folgenden einfach durch eine *Rekursionsvorschrift* berechnet werden:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Beispiel:

$H_3(x)$  mit  $n = 2$

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - 2 \cdot 2H_1(x) = 8x^3 - 4x - 8x = 8x^3 - 12x.$$

- Die Funktionen  $H_k(x)$  mit  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  bilden eine orthogonale *Basis* des *Vektorraums* der Polynome vom Grad kleiner gleich  $n$ . Dabei wird das folgende *Skalarprodukt* verwendet, das über eine *Integration* definiert ist:

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx.$$

Es gilt

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

Beispiele:

$$n = m = 0$$

$$\langle H_0(x), H_0(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 1 \cdot 1 dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Wert des Integrals findet sich in Tabellen (bzw. Berechnung über den Umweg einer Funktion zweier Variablen).

$$n = 0, m = 1$$

$$\langle H_0(x), H_1(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2x dx.$$

Der Integrand ist das Produkt einer *geraden* und einer *ungeraden* Funktion und ist damit insgesamt ungerade. Das symmetrische Integral einer ungeraden Funktion ist null, wie von  $\delta_{01}$  gefordert.

$$n = m = 1$$

$$\begin{aligned} \langle H_1(x), H_1(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 2x \cdot 2x dx \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (-2x) x dx \\ &= -2 \left\{ \left[ e^{-x^2} x \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} \\ &= 2\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Bei dem vorletzten Schritt kommen sowohl die *Substitutionsmethode* als auch die *partielle Integration* zum Einsatz. Bei dem letzten Schritt wird verwendet, dass die Stammfunktion im Unendlichen verschwindet.

- Die Polynome  $H_n(x)$  sind Lösungen einer *homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem variablen Koeffizienten* ( $2x$ ):

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Beispiel: Nachrechnen, dass  $H_3(x)$  Lösung der Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned}(8x^3 - 12x)'' &= 2x(8x^3 - 12x)' + 2 \cdot 3(8x^3 - 12x) \\ &= (24x^2 - 12)' - 2x(24x^2 - 12) + 6(8x^3 - 12x) \\ &= 48x - 48x^3 + 24x + 48x^3 - 72x \\ &= 0.\end{aligned}$$