

Vorlesung „Allgemeine Meteorologie“

Prof. Michael Kunz

Kapitel 7: Einführung in die Dynamik der Atmosphäre



Letzte Vorlesung...

- Energiebilanz: Strahlungsbilanz Q , Bodenwärmestrom B , fühlbarer Wärmefluss H , latenter Wärmefluss E ; ausgeglichen im Mittel

$$Q + B + H + E = 0$$

Temp. *Wasserdampf*

- Global und über den meisten Böden ist $E > H$; trockene Böden/Wüste: $H > E$

- Reflexionsgesetz Brechungsgesetz Snellius Totalreflexion

$$\theta_r = \theta_i$$

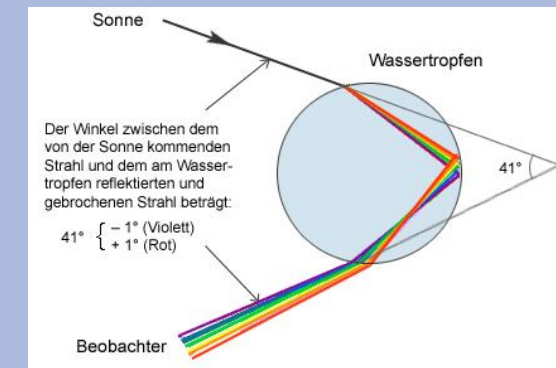
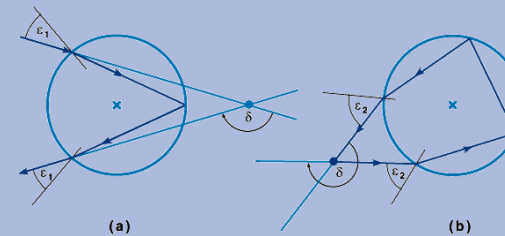
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\sin \theta_k = \frac{n_2}{n_1}$$

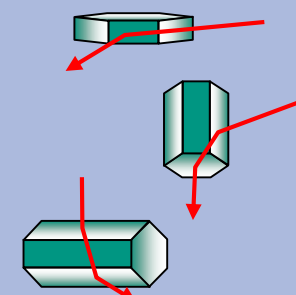
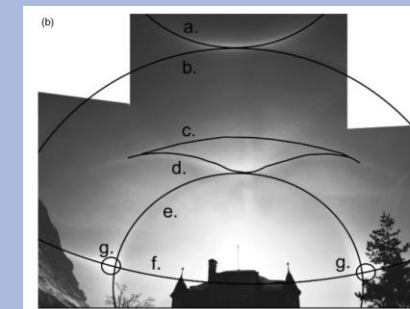
- Dispersion: kürzere Wellenlängen werden stärker gebrochen als lange

- Regenbogen: Brechung + Totalreflexion + Dispersion

- Primärer Regenb. $\sim 42^\circ$ Beobachtungswinkel
- Sekundärregenbogen $\sim 51^\circ$



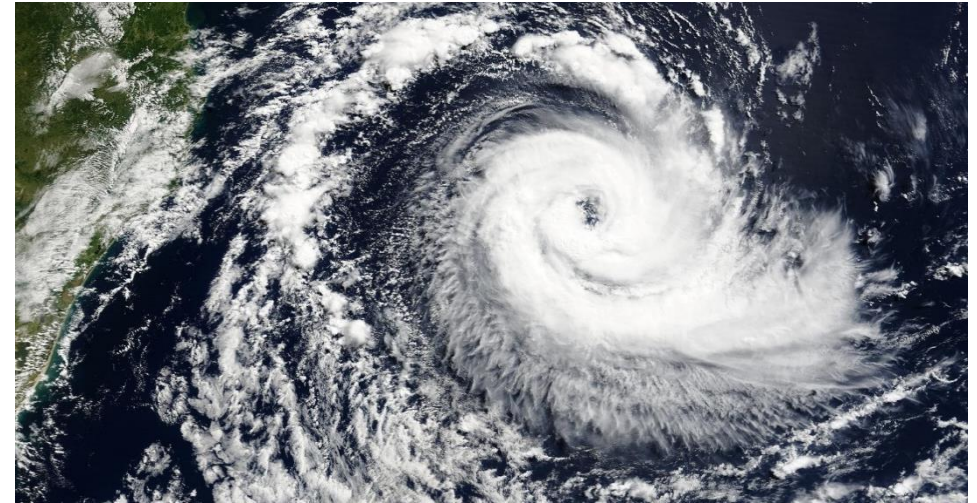
- **Haloerscheinungen:** untersch. Strahldurchgänge durch Plättchen und Säulen



7 Einführung in die Dynamik der Atmosphäre

→ bestimmt Tagesgang Temp

„Alle Wettersysteme sind mit Wind verbunden“



Agenda heute...

7 Einführung in die Dynamik der Atmosphäre

7.1 Newtonsche Axiome

7.2 Kräfte/Beschleunigungen in der Atmosphäre

7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

7.2.2 Schwere-Beschleunigung

7.2.3 Zentrifugal-Beschleunigung

7.2.4 Reibung

7.2.5 Coriolis-Beschleunigung

7.3 Bewegungsgleichungen

7.4 Skalenanalyse und vereinfachte Balancen

7.4.1 Geostrophischer Wind

7.4.2 Thermischer Wind

7.4.3 Gradientwind

7.4.4 Zyklotropischer Wind

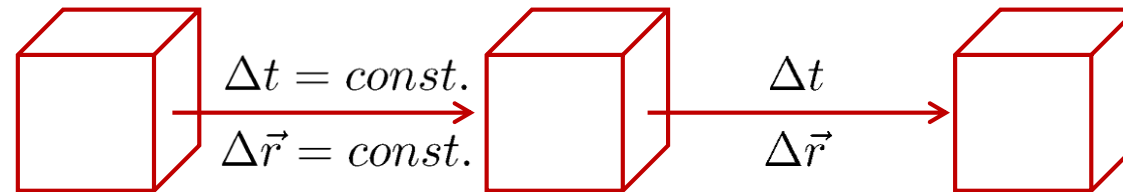
GastVL Philipp

ω -Komponente v.a. wichtig für
Wolkenbildung
an Wolken Strömungen erkennbar
ab 3. Semester spannender,
durchhalten! $\Rightarrow$

7.1 Newtonsche Axiome

Lex Prima

„Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine äußere resultierende Kraft auf ihn wirkt“

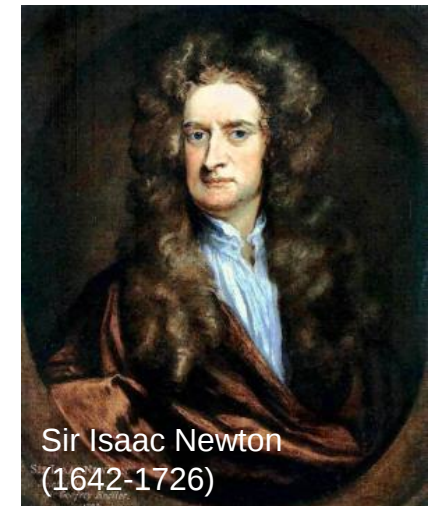


■ Beharrungsvermögen: Trägheit

■ Bewegung ~ Impuls $\vec{I} = m\vec{v}$ (Masse x Geschwindigkeit)

→ Impulserhaltungssatz:

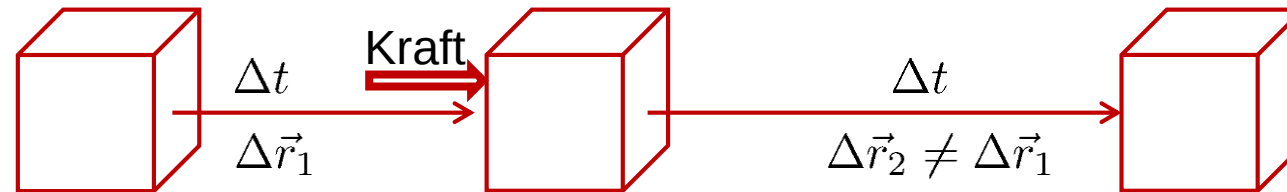
$$\vec{I} = m\vec{v} = \text{const.}$$



7.1 Newtonsche Axiome

Lex Secunda

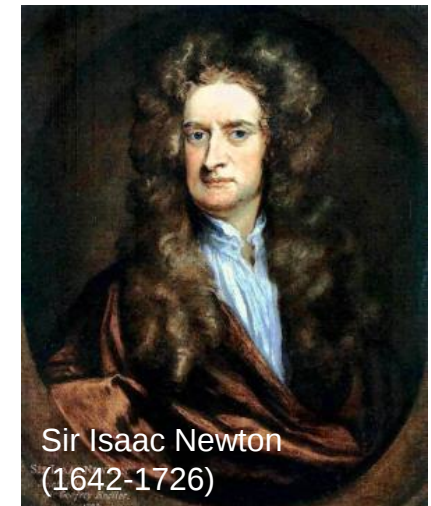
„Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in die Richtung, nach welcher jene Kraft wirkt“



- **Gültig für Inertialsysteme:** Koordinatensystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig und gleichförmig bewegen; in Ruhe gegenüber Fixsternhimmel

→ Impulssatz

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

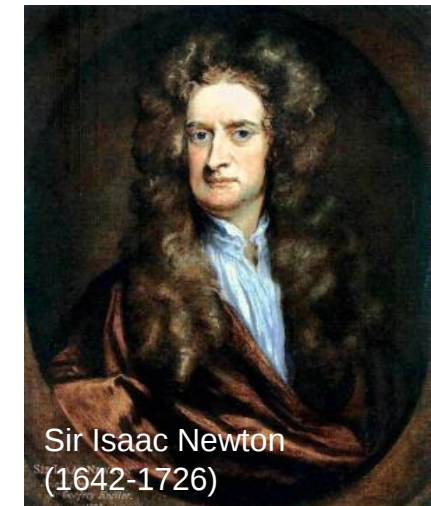
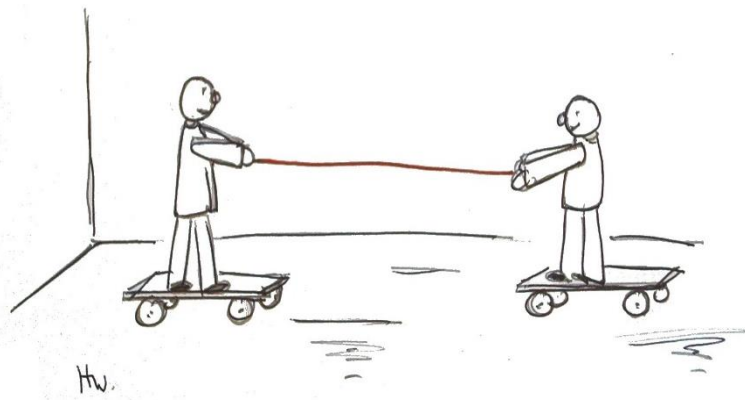
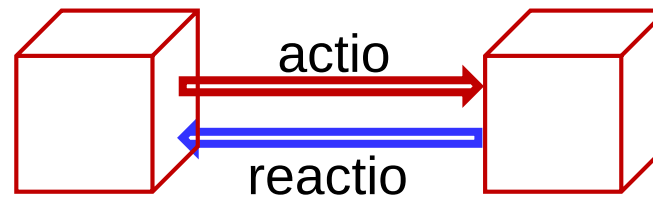


Sir Isaac Newton
(1642-1726)

7.1 Newtonsche Axiome

Lex Tertia

„Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio)“

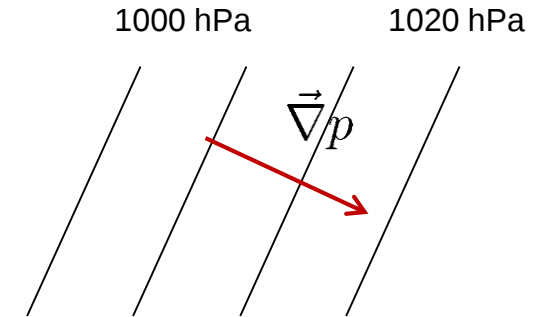


Einschub: Vektorrechnung

■ Gradient eines Skalars → Vektor

- gibt Betrag und Richtung an, z.B. Druckgradient:

$$\text{grad } p = \vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

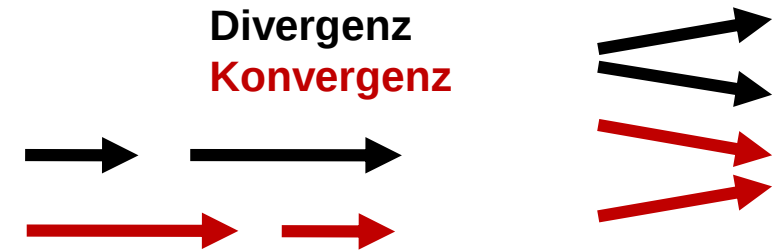


■ Divergenz eines Vektors → Skalar

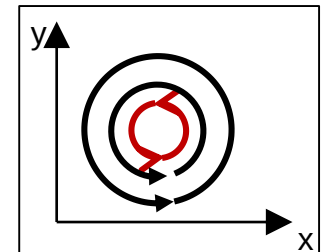
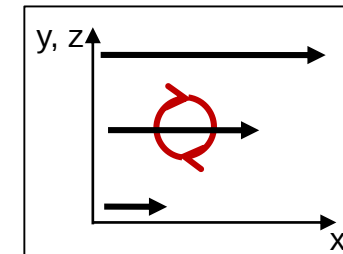
→ Hebung, θ / T - Gebiete

- negative Divergenz = Konvergenz
- Windfeld: Richtungs- / Geschwindigkeits-Divergenz

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$



an Stat z.B.
den stärker gezogen als
unten → wird gedreht (Rot)



■ Rotation eines Vektors → Vektor

- gibt Betrag und Richtung an
- beschreibt z.B. rotierende Strömungen

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Fragen über Fragen...

- Welche **Kräfte/Beschleunigungen** wirken auf ein Luftvolumen in der Atmosphäre?
- Welche Kräfte sind **Scheinkräfte**? Was sind überhaupt Scheinkräfte?
- Welchen Effekt hat die **Reibungskraft** auf die Strömung in der Atmosphäre?

7.2 Kräfte/Beschleunigungen in der Atmosphäre

Impulssatz (aus Lex Secunda)

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

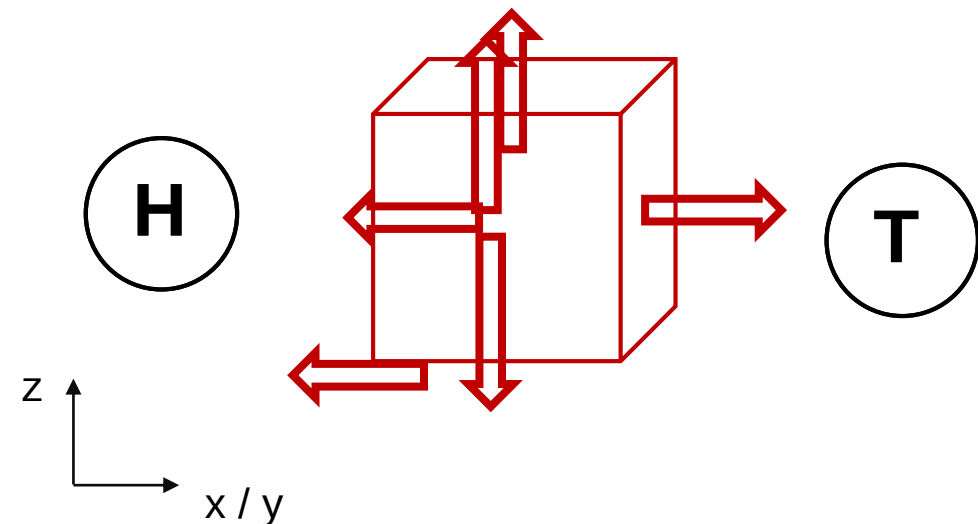
Übertragen auf Atmosphäre:

- Beschleunigung und damit Bewegungen in der Atmosphäre sind das Resultat von Kräften, die auf ein Luftteilchen (Volumen) wirken

■ Kräfte in der Atmosphäre und ihre Richtungen:

- » Druckgradientkraft
- » Schwerkraft
- » Reibungskraft
- » *Corioliskraft* (nur im Relativsystem!)*
- » *Zentrifugalkraft* (nur im Relativsystem!)*

** aufgrund Erdrotation*



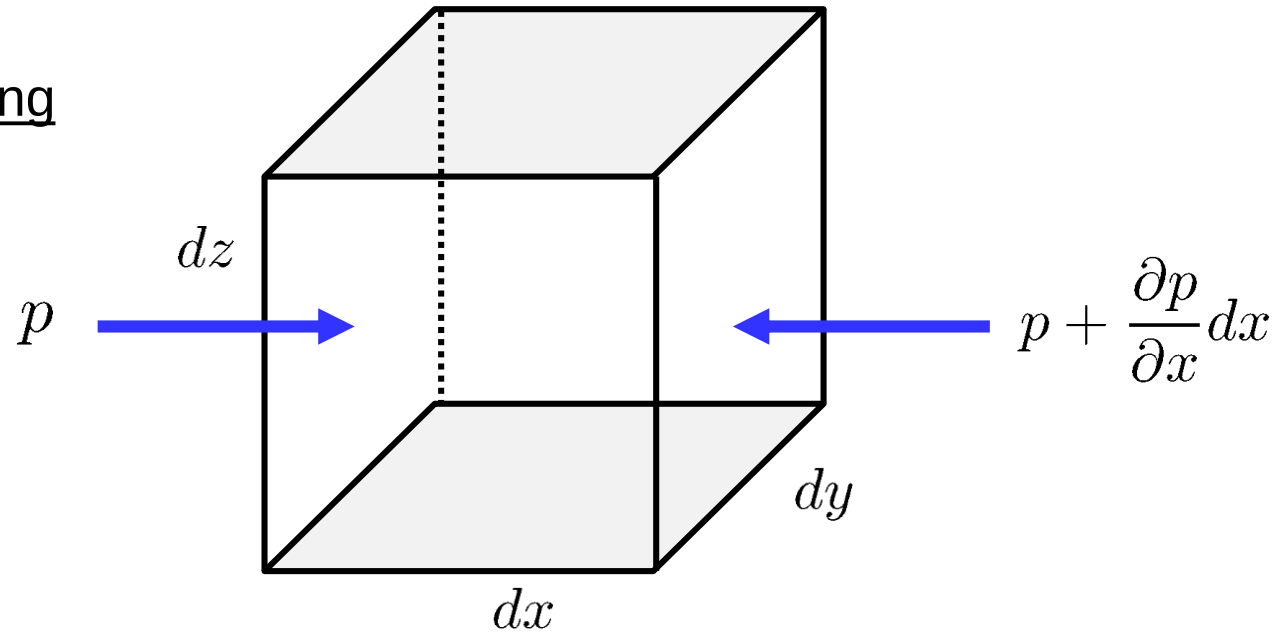
■ In Bewegungsgleichung meist Angabe Kraft pro Masseneinheit = Beschleunigung

7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

Druckgradient: Ursache der Luftbewegungen

- Betrachtung differentiell Volumenelement $dV = dxdydz$
- Es sei $p = p(x, y, z)$; Druck = Gewichtskraft / Fläche

Druckgradientkraft in x-Richtung



- Kraft linke Seite: $p \, dy \, dz$
 - Kraft rechts: $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy \, dz$
- } $-\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV = dF_{p,x}$

7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

Druckgradient: wichtigste Kraft für Luftbewegungen

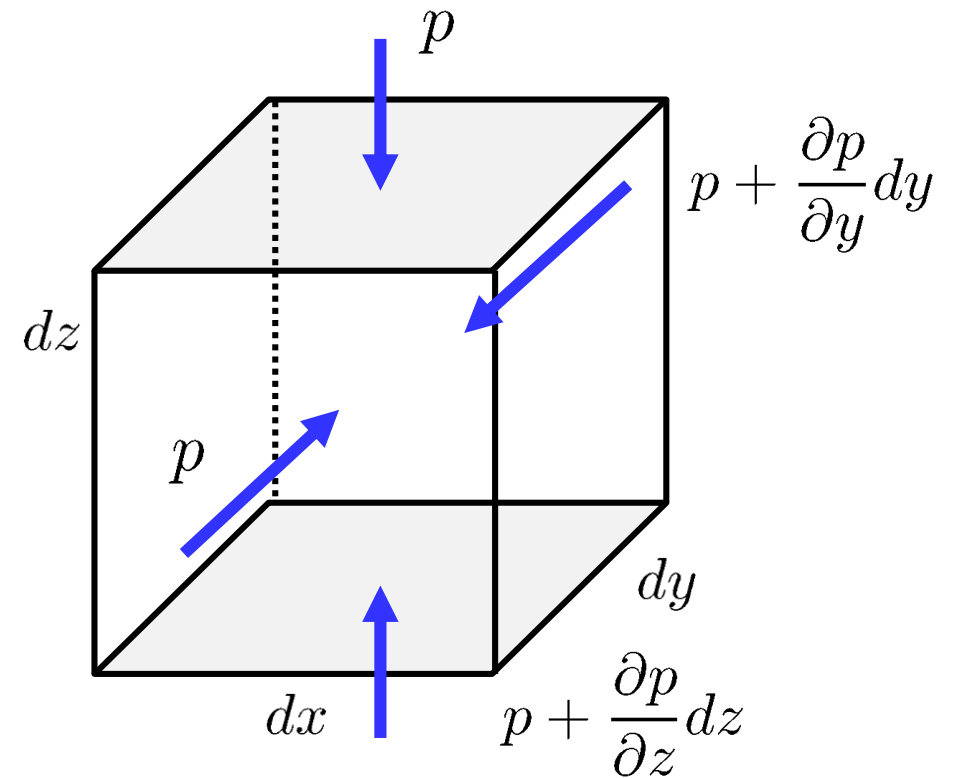
Druckgradientkraft in y/z-Richtung

$$dF_{p,y} = -\frac{\partial p}{\partial y}dV, \quad dF_{p,z} = -\frac{\partial p}{\partial z}dV$$

■ Insgesamt also:

$$d\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)dV$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung

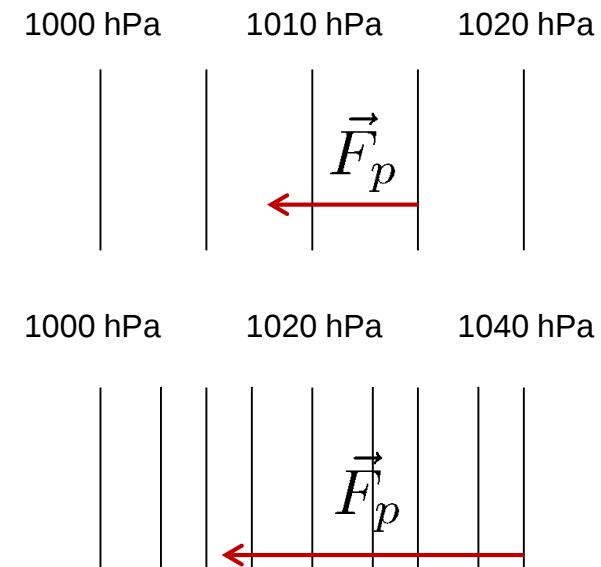
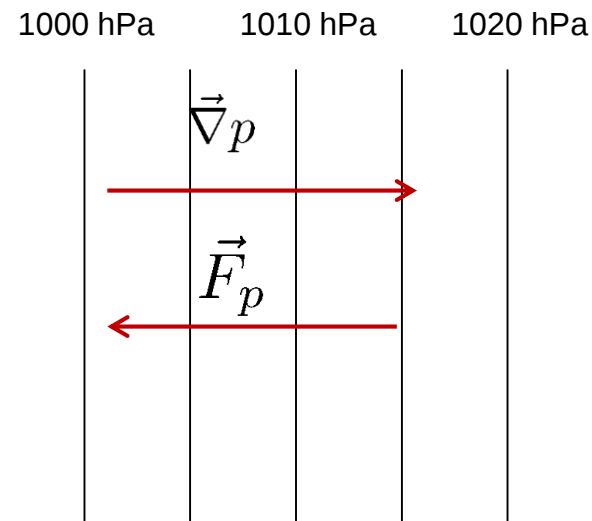


■ Damit folgt für Druckgradientkraft pro Masseneinheit (= Beschleunigung)

$$\frac{\vec{F}_p}{m} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

- Beachte: Gradient zeigt stets in Richtung des größten Anstiegs; wegen neg. Vorzeichen ist $\vec{F}_p$ vom hohen zum tiefen Druck gerichtet
- Ohne weitere Kräfte würde Luft vom hohen zum tiefen Druck strömen (**aber: wegen Corioliskraft ist das nicht der Fall!**)
- Halbierung der Strecke der Druckdifferenz verdoppelt Druckgradient-Beschleunigung



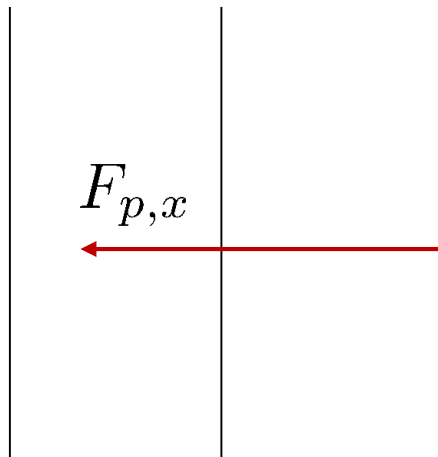
7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

Beschleunigung eines Luftpakets infolge eines Druckgradienten

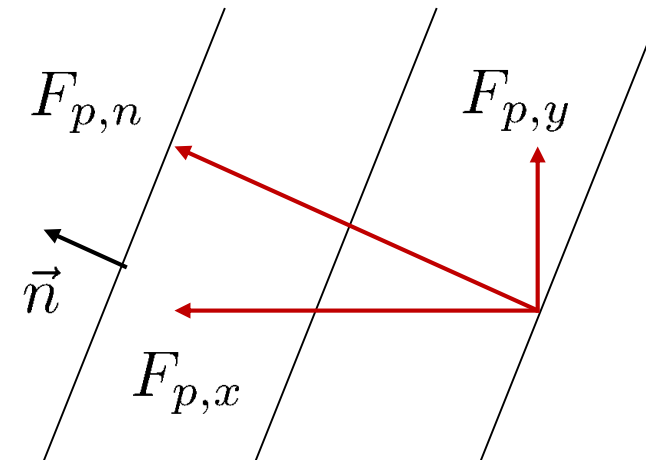
- Wenn Druckgradient zwei (oder drei) Komponenten aufweist, kann der Betrag des Druckgradienten bestimmt werden durch den Normalenvektor

$$\frac{F_p}{m} = \frac{1}{m} \sqrt{F_{p,x}^2 + F_{p,y}^2} = -\frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} \rightarrow \frac{F_{p,n}}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

1000 hPa 1010 hPa 1020 hPa



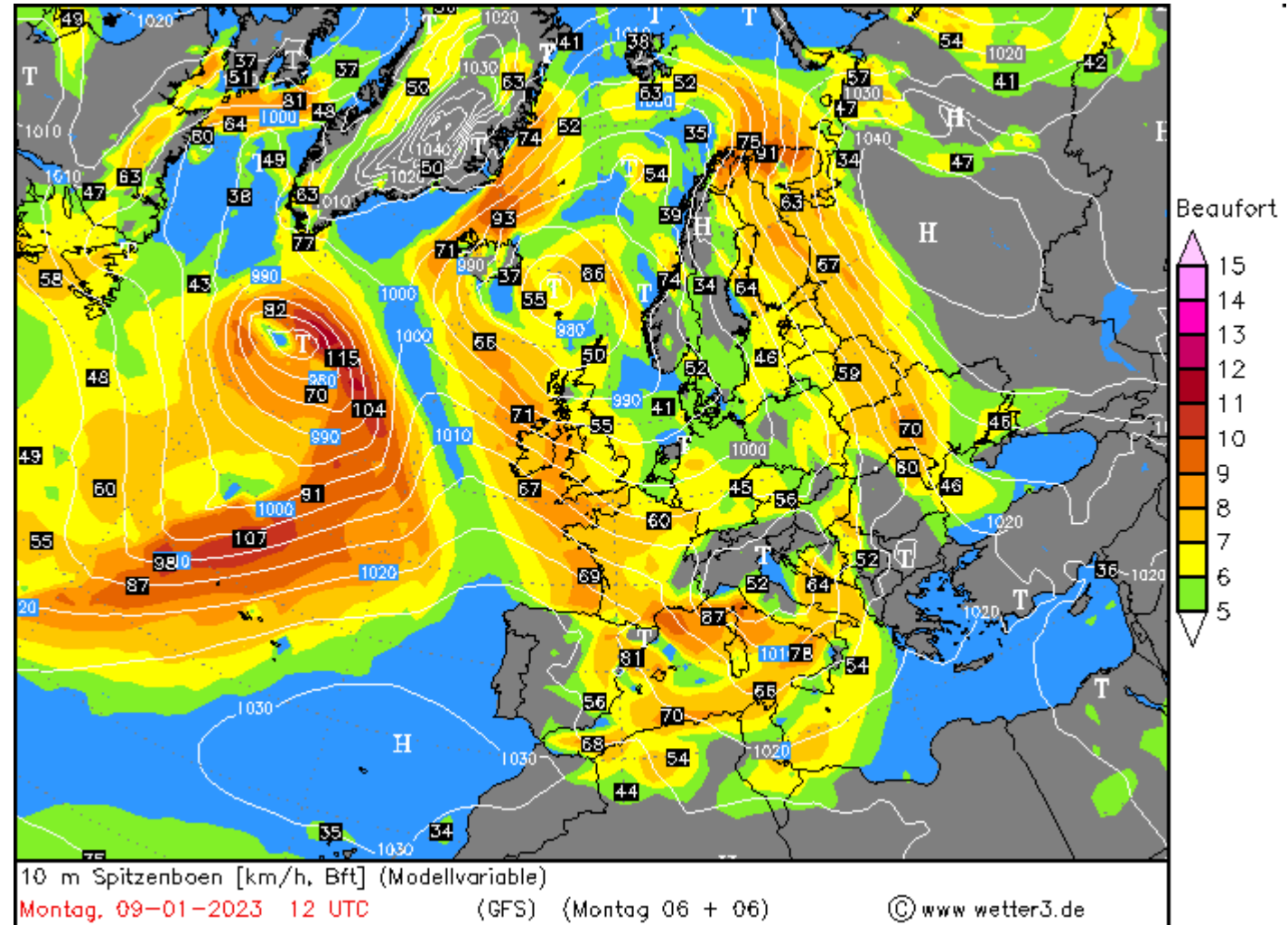
1000 hPa 1010 hPa 1020 hPa



7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

Beschleunigung eines Luftpakets infolge eines Druckgradienten

- Windgeschwindigkeit proportional zu Druckgradient (Annahmen geostrophisches Gleichgewicht und konstante geographische Breite)



7.2.2 Schwerebeschleunigung

Vertikale Beschleunigung eines Luftpakets infolge Schwerkraft

- Gravitationsbeschleunigung zum Erdmittelpunkt gerichtet: $\frac{F}{m} = g^* = -\gamma \frac{m_E}{R_E^2}$

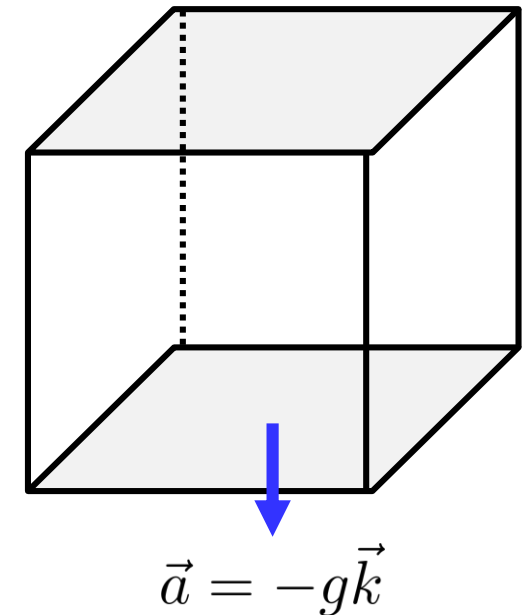
γ : Gravitationskonstante, m_E : Masse Erde, R_E : Radius Erde

- Schwerebeschleunigung (Kraft pro Masseneinheit) als Resultat der Gravitation

$$\frac{\vec{F}_G}{m} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} - g\vec{k} = -g\vec{k}$$

$\vec{k}$: Einheitsvektor in z-Richtung

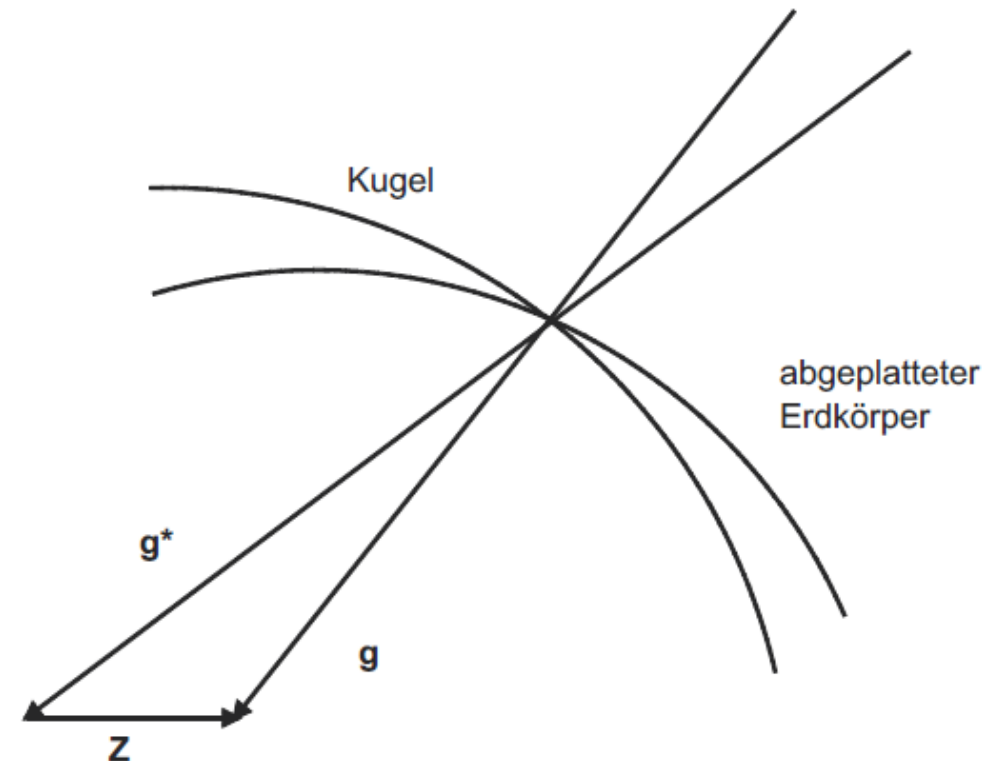
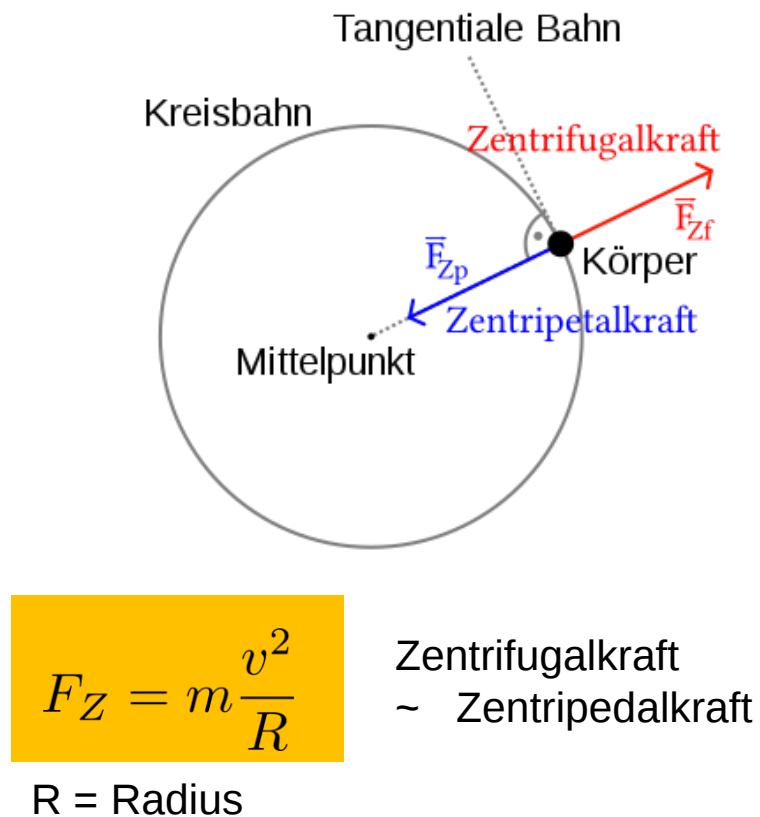
- Schwerebeschleunigung ist abhängig von **Höhe z** (Abstand vom Erdmittelpunkt) und **geografischer Breite φ** (Abplattung Erde)
- Unterschiede der Schwerebeschleunigung aufgrund des inhomogenen Aufbaus der Erde werden i.d.R. vernachlässigt



7.2.3 Zentrifugalbeschleunigung

Gravitation vs Zentrifugalkraft

- Durch Rotation / Zentrifugalkraft: Modifikation der Gravitation
- Führt zur Abplattung der Erde an den Polen und „Äquatorwulst“



7.2.3 Zentrifugalbeschleunigung

Gravitation vs Zentrifugalkraft

- Durch Rotation / Zentrifugalkraft: Modifikation der Gravitation
- Führt zur Abplattung der Erde an den Polen und „Äquatorwulst“

- Berücksichtigung bei Gravitationsbeschleunigung:

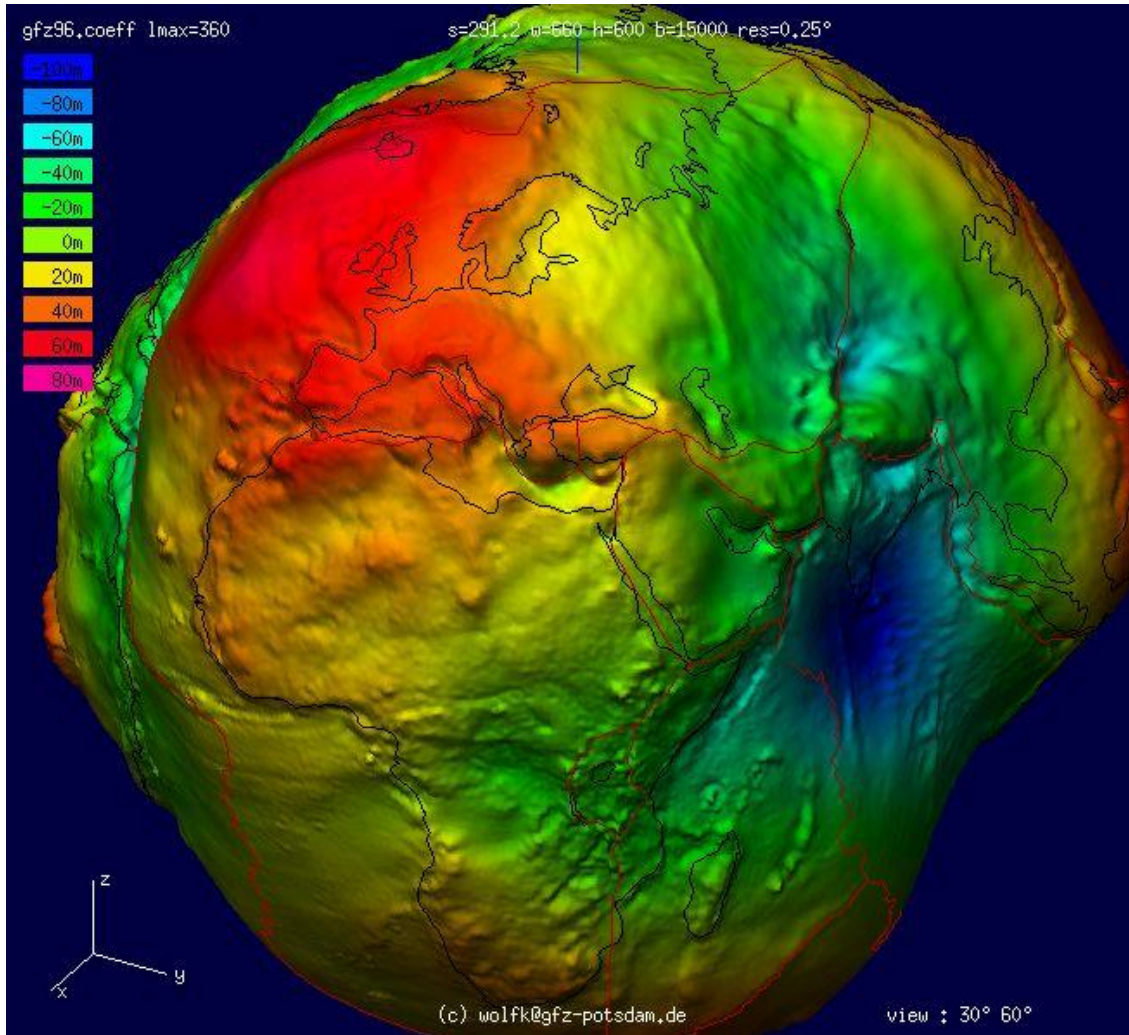
$$g = g^* - \frac{F_Z}{m} = g^* - \frac{v^2}{R}$$

- **Tatsächliche (effektive) Schwerebeschleunigung** als Funktion der Höhe z (Abstand vom Erdmittelpunkt) und der geografischen Breite φ (Abplattung Erde)

$$g(\varphi, z) = 9,80665 \text{ m s}^{-2} (1 - 0,0026373 \cos 2\varphi + 0,0000059 \cos^2 2\varphi) (1 - 3,14 \cdot 10^{-7} z \text{ m}^{-1})$$

Ist die Erde rund oder eine Kartoffel?!?

Erdschwerefeldes für GFZ 96



10 000-fache Vergrößerung

Schwereanomalien:

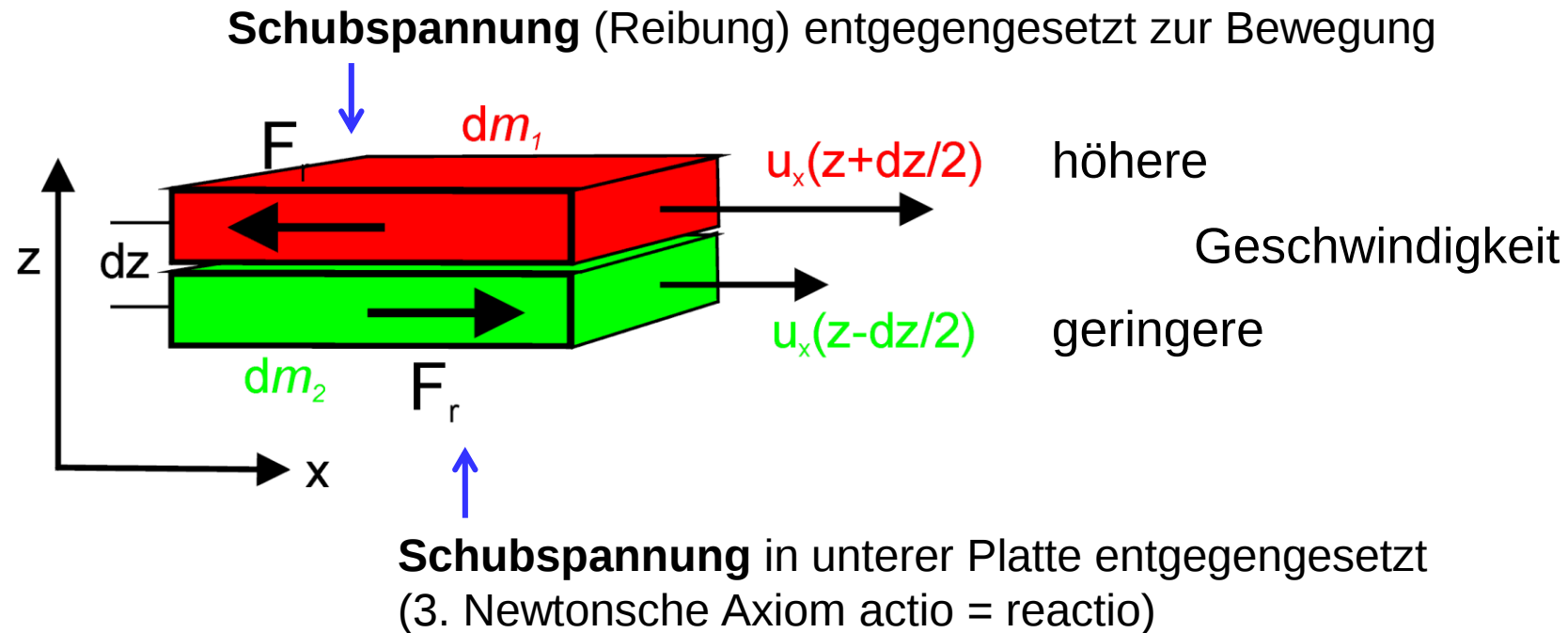
Masse in der Erdkruste (Gebirge, Kontinentalplatten) und im Erdmantel und -kern ist nicht gleichmäßig verteilt ist

Quelle: <http://www-app2.gfz-potsdam.de/sec13/animated-potato-d-cms.html>

7.2.4 Reibungskraft

Negative Beschleunigung eines Luftpakets infolge von Reibung

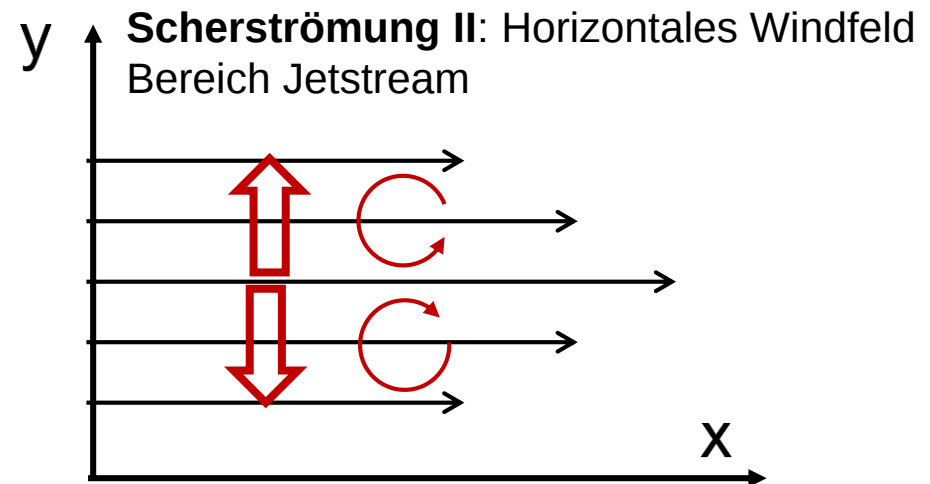
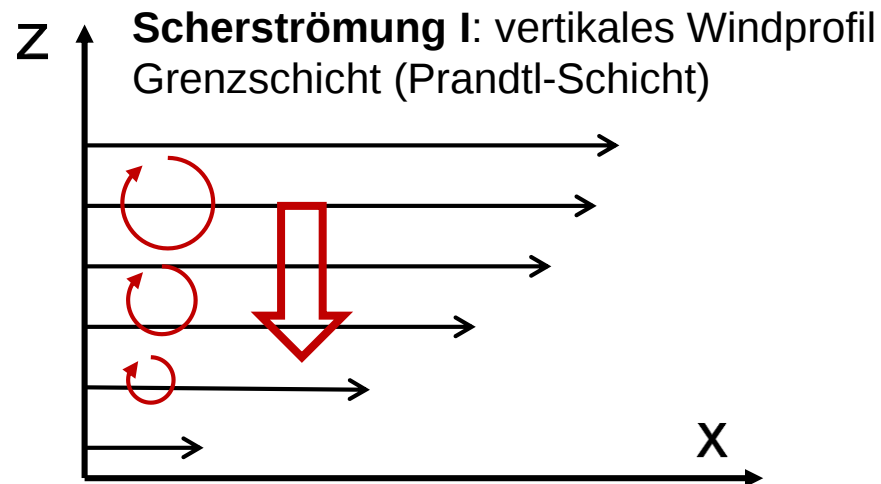
- Reibungskräfte am Boden verursachen Schubspannung (Kraft pro Flächeneinheit parallel zur Fläche), die entgegen der Bewegung wirkt
- Analogon: Zwei Platten, obere Platte mit höherer Geschwindigkeit; erfährt ein Abbremsen durch untere Platte wegen Schubspannung



7.2.4 Reibungskraft

Negative Beschleunigung eines Luftpakets infolge von Reibung

- **Mikrophysikalisch:** Luftteilchen aus Bereichen mit höheren Geschwindigkeiten übertragen Impuls an Schichten mit geringeren Geschwindigkeiten v.a. durch turbulenten Austausch (abh. von thermischer Schichtung); Reibung in Luft, nicht an Oberfläche
 - turbulenter Austausch $\gg$ molekularer Austausch
- Dadurch **verliert die Strömung Impuls** an die Oberfläche



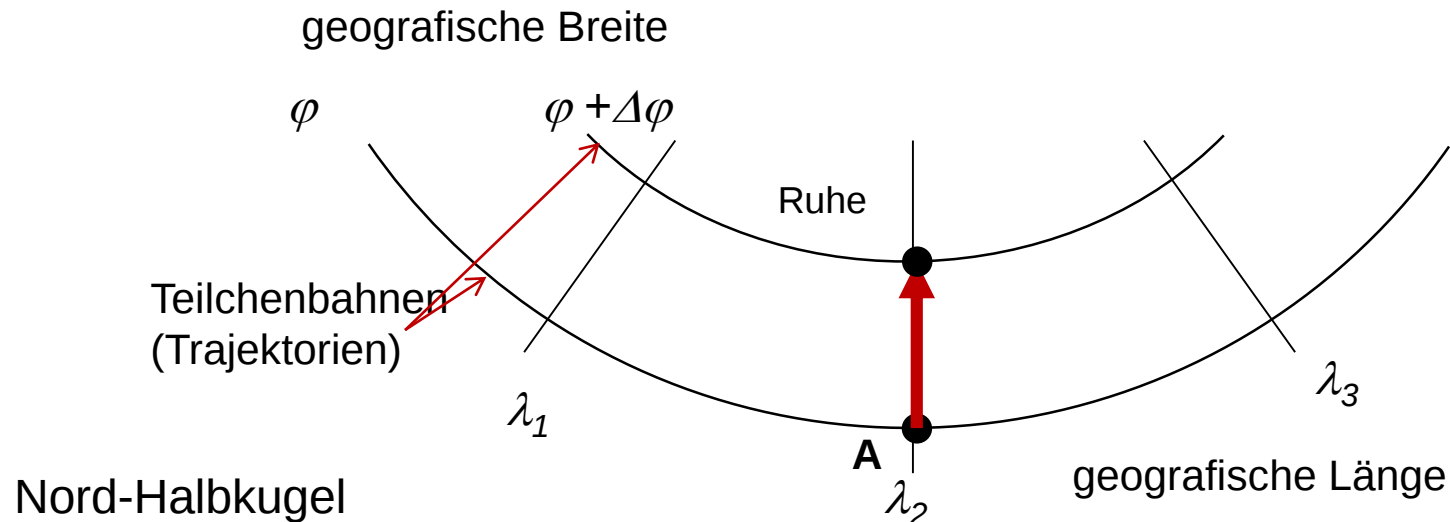
Fragen über Fragen...

- Woher resultiert die **Corioliskraft**?
- Was sind die **Folgen** der Corioliskraft für die Strömung?
- Wo ist die Corioliskraft am **größten**?
- Welchen Wert hat sie am **Äquator**?
- Gibt es **tropische Wirbelstürme** am Äquator?

7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

- Newtonsche Axiome nur gültig im **Intertialsystem** (unbeschleunigt, fest gegenüber Fixsternhimmel)
- Übertragung auf **rotierendes System Erde**: Einführung von **Scheinkräften**:
 - können keine Arbeit verrichten, also keine Beschleunigung
 - führen zur Ablenkung der Strömung
- Wichtigste Scheinkraft: **Coriolisbeschleunigung/kraft**

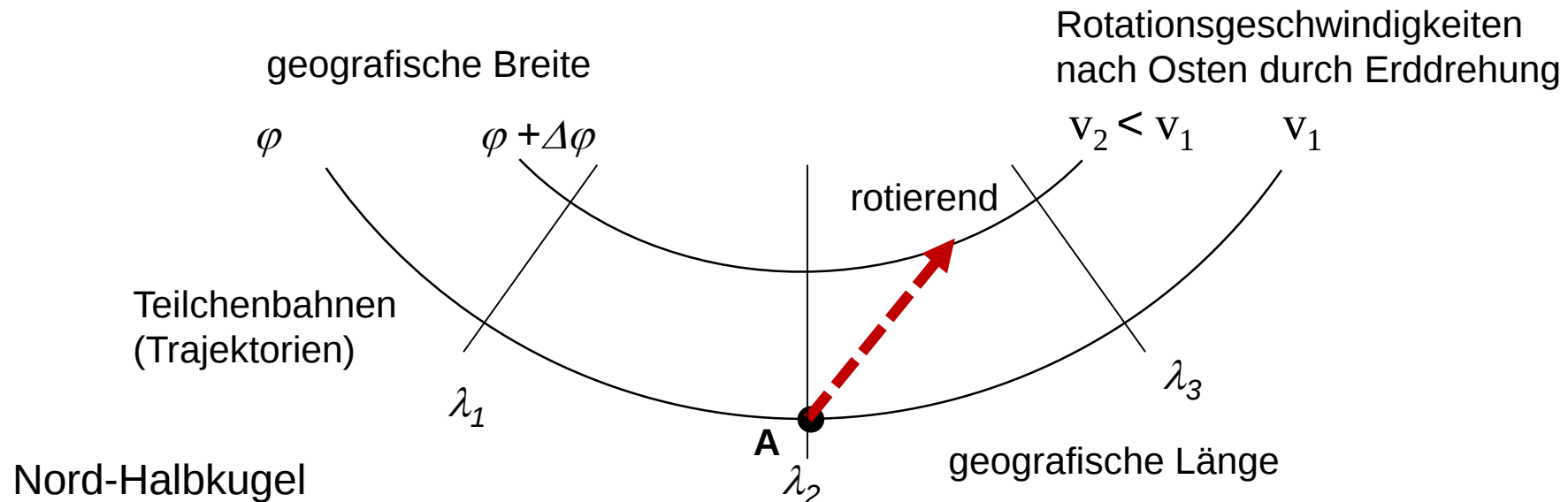


7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

■ N-S Bewegung bei rotierender Erde (Nordhalbkugel)

- Teilchen in A besitzt Rotationsgeschwindigkeit v_1 durch Erddrehung
- Auf Weg nach Norden $\rightarrow$ Gebiet mit geringerer Rotationsgeschw v_2
- Aus Trägheitsgründen versucht Teilchen, Geschwindigkeit v_1 beizubehalten
 $\rightarrow$ Ablenkung nach Osten, nach rechts in Bewegungsrichtung



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

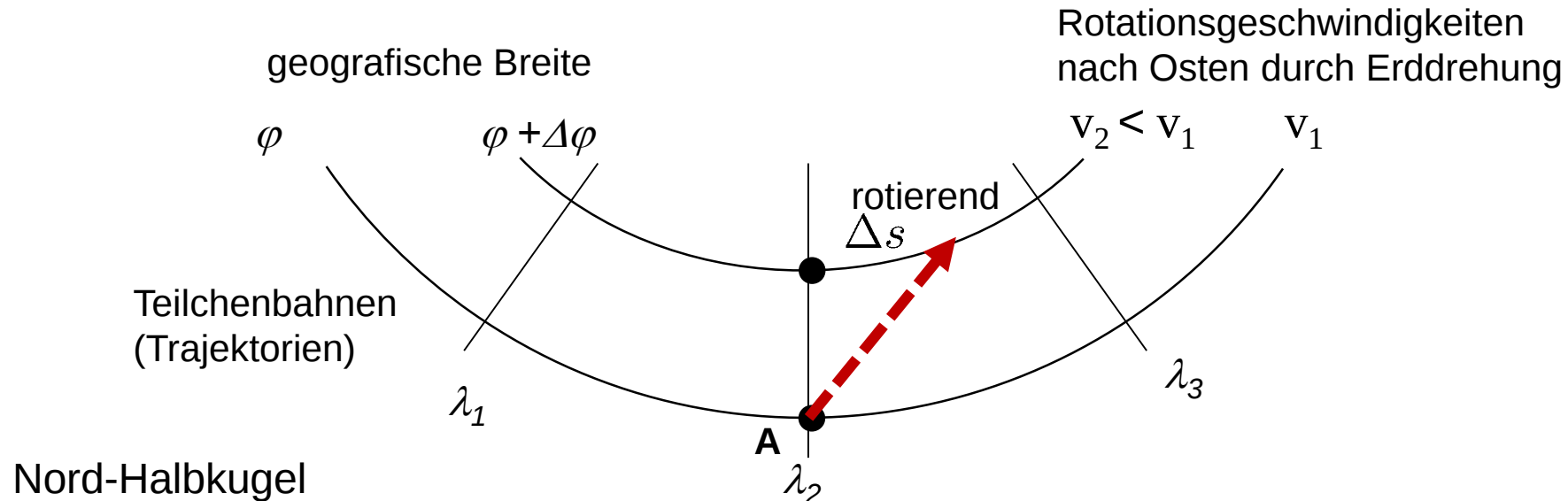
■ Geschwindigkeiten durch Rotation: $v_1 = \frac{2\pi}{t_*} R \cos \varphi$ $v_2 = \frac{2\pi}{t_*} R \cos(\varphi + \Delta\varphi)$

R : Erdradius $t_* = \frac{2\pi}{\Omega}$: Umdrehungsperiode

$\Omega = \frac{2\pi}{t_*} = \frac{2\pi}{86164 \text{ s}} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ Winkelgeschwindigkeit Erde

■ Verschiebung nach Ost: $\Delta s = \Delta v \cdot \Delta t = \frac{2\pi}{t_*} R (\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)) \Delta t$

Δt : Zeit, um von φ nach $\varphi + \Delta\varphi$ zu kommen



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

- Konstante Beschleunigung (W-O Richtung):

für Bewegung in N-S Richtung gilt:

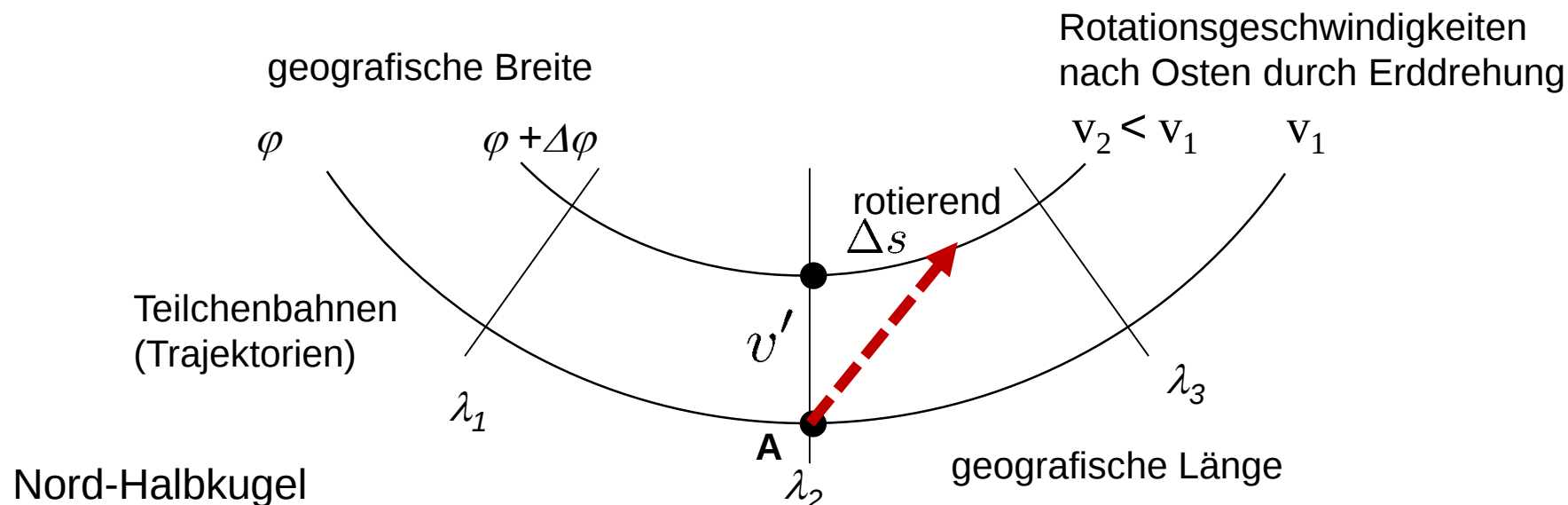
- daraus folgt

$$\Delta s = \frac{2\pi}{t^*} R (\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta \varphi)) \Delta t$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \Leftrightarrow \underline{a} = \frac{2\Delta s}{\Delta t^2}$$

$$\Delta \varphi \cdot R = v' \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{R \Delta \varphi}{v'}$$

$$\underline{a} = \frac{4\pi}{t^*} \frac{\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta \varphi)}{\Delta \varphi} v'$$



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

- Konstante Beschleunigung (W-O Richtung):

für Bewegung in N-S Richtung gilt:

- daraus folgt

- ...mit

$$\Omega = \frac{2\pi}{t^*}$$

- ...Übergang zu Differentialen ($\Delta\varphi \rightarrow d\varphi$)

→ **Coriolisbeschleunigung** (hier für y-Komponente):
Scheinkraft, die auftritt bei Bewegung relativ zur rotierenden Erde

$$\Delta s = \frac{2\pi}{t^*} R (\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)) \Delta t$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \Leftrightarrow a = \frac{2\Delta s}{\Delta t^2}$$

$$\Delta\varphi \cdot R = v' \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{R\Delta\varphi}{v'}$$

$$a = \frac{4\pi}{t^*} \frac{\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\Delta\varphi} v'$$

$$= 2\Omega \frac{\cos \varphi - \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{\Delta\varphi} v'$$

$$= -2\Omega v' \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = 2\Omega v' \sin \varphi$$

7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

■ W-O Bewegung bei rotierender Erde (Nordhalbkugel)

- Teilchen in P, das sich mit Geschwindigkeit u nach Osten bewegt
- Absolute Geschwindigkeit:
- Teilchen erfährt Zentrifugalbeschleunigung:

$$u_a = u + \Omega r$$

$$\frac{u_a^2}{r} = \frac{(u + \Omega r)^2}{r} = \Omega^2 r + 2\Omega u + \frac{u^2}{r}$$

$\Omega^2 r$ wirkt auf alle Teilchen Erdoberfläche (Abplattung Erde; bereits in g^* enthalten)

$\frac{u^2}{r}$ Zentrifugalkraft bei W-O Bewegung; betragmäßig sehr klein, wird i.d.R. vernachlässigt ($\sim 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$)

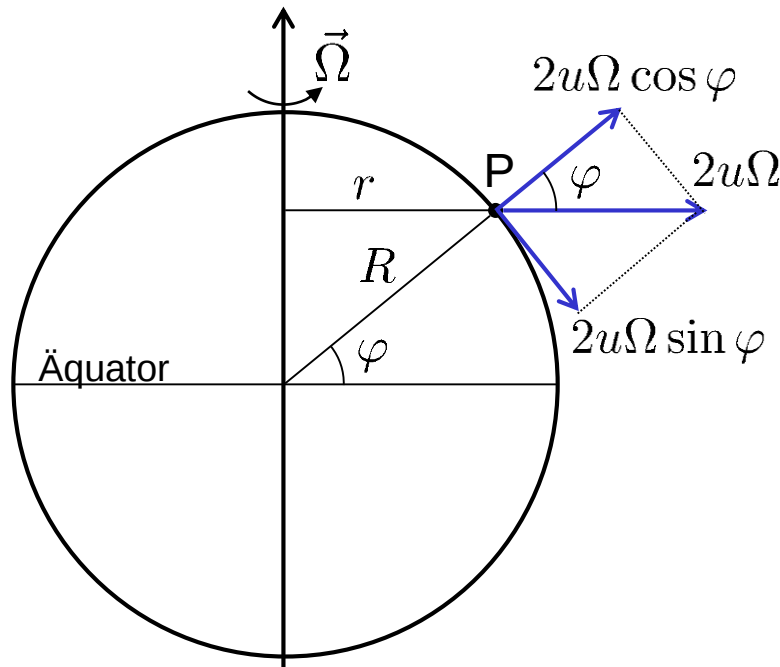
$2u\Omega$ Zerlegung in y/z Komponente

Vertikalkomp.: $2u\Omega \cos \varphi$

→ ~3 Größenordnungen < als Gravitation

Horizontalkomp.: $2u\Omega \sin \varphi$

→ **Rechtsablenkung bei W-O Bewegung**



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

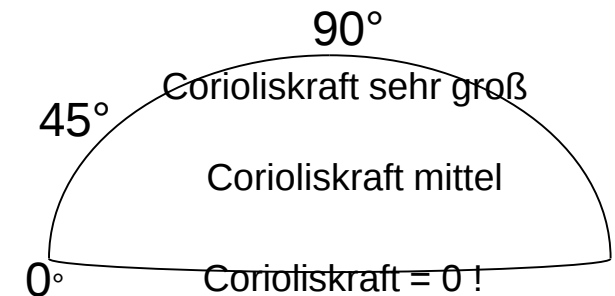
- Corioliskraft ist ein 3-D Vektor mit den drei Komponenten

$$F_{C,x} = 2\Omega(v \sin \varphi - w \cos \varphi)m$$

$$F_{C,y} = -2\Omega u \sin \varphi m$$

$$F_{C,z} = 2\Omega u \cos \varphi m$$

- Vertikale Corioliskraft $\ll$ Schwerkraft (3 Größenordnungen), daher in Näherung vernachlässigbar
- Corioliskraft ist **linear abhängig** von der **Geschwindigkeit** (u,v); bei ruhenden Teilchen ist Corioliskraft = 0
- abhängig von der geogr. Breite; da $|F_c| \sim \sin \varphi$, nimmt die Corioliskraft zu hohen Breiten hin zu
- ändert nicht die kinetische Energie der Strömung: **Scheinkraft**
- bei **kleinräumigen Bewegungen** dominieren andere Kräfte



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

- Steht senkrecht auf Geschwindigkeitsvektor
⇒ Rechtsablenkung der Strömung auf der Nordhalbkugel
- Auf Tangentialebene: Aufspaltung Rotationsvektor in Komponenten:

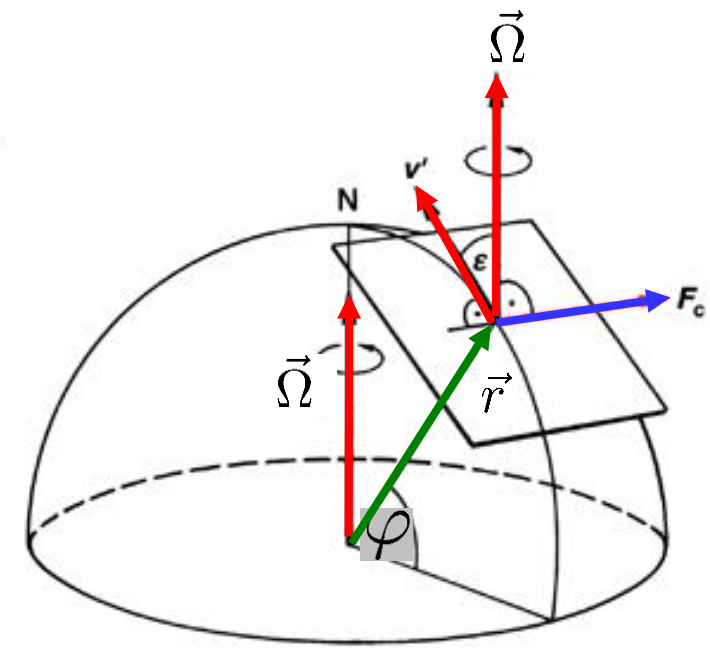
$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= 0\vec{i} + \Omega \cos \varphi \vec{j} + \Omega \sin \varphi \vec{k} \\ &= f^* \vec{j} + f \vec{k}\end{aligned}$$

- Am Wichtigsten, da relevant für horizontale Komponenten Corioliskraft:

$$f = \Omega \sin \varphi; \quad f(45^\circ) \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

- Als Kreuzprodukt:

$$\frac{\vec{F}_c}{m} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$$



Wir fassen zusammen...

- **Newtonsche Axiome:** 1. Trägheitsgesetz; 2. Beschleunigung durch einwirkende Kräfte; 3. Actio = Reactio
- **Druckgradientkraft:** Ursache von Bewegungen in Atmosphäre; Beschleunigung linear proportional zu Druckgradienten
- **Schwerkraft:** Folge der Gravitation; da Schwerkraft entgegengesetzt zu Zentrifugalkraft ist, wird i.d.R. effektive Schwerkraft berücksichtigt
- **Reibungskraft:** Reibung entgegengesetzt zu Bewegungsrichtung; Scherströmung; Reibung sowohl Vertikal (Oberfläche) als auch horizontal (Scherströmung) relevant
- **Corioliskraft:** Scheinkraft; führt zur Rechtsablenkung bei horizontalen Bewegungen (unabhängig von der Richtung) auf NH (SH umgekehrt); F_c ist direkt proportional zu $|v|$; wenn $v = 0$, folgt $F_c = 0$; F_c ist am Äquator = 0, an den Polen maximal