

Vorlesung „Allgemeine Meteorologie“

Prof. Michael Kunz

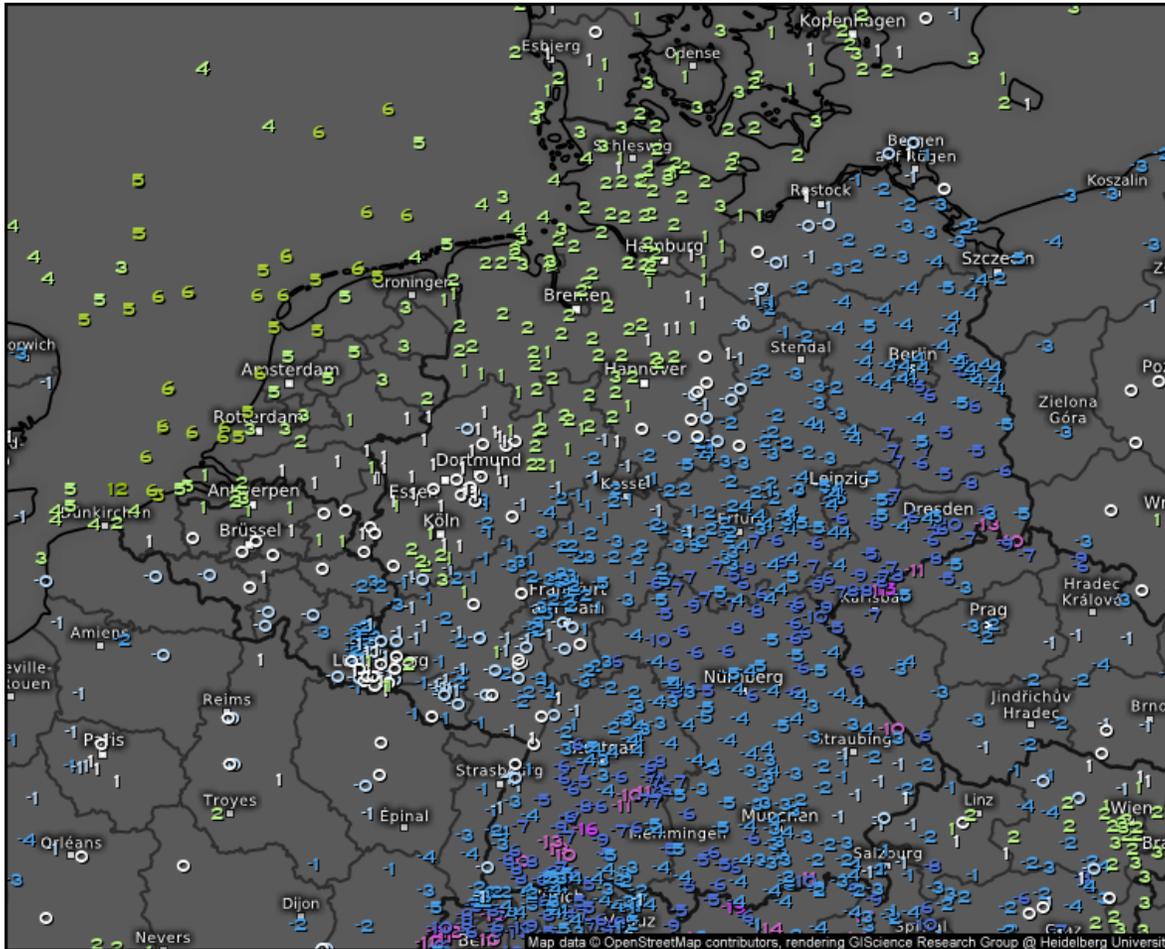
Kapitel 7: Einführung in die Dynamik der Atmosphäre



Das Wetter...



Wetter aktuell

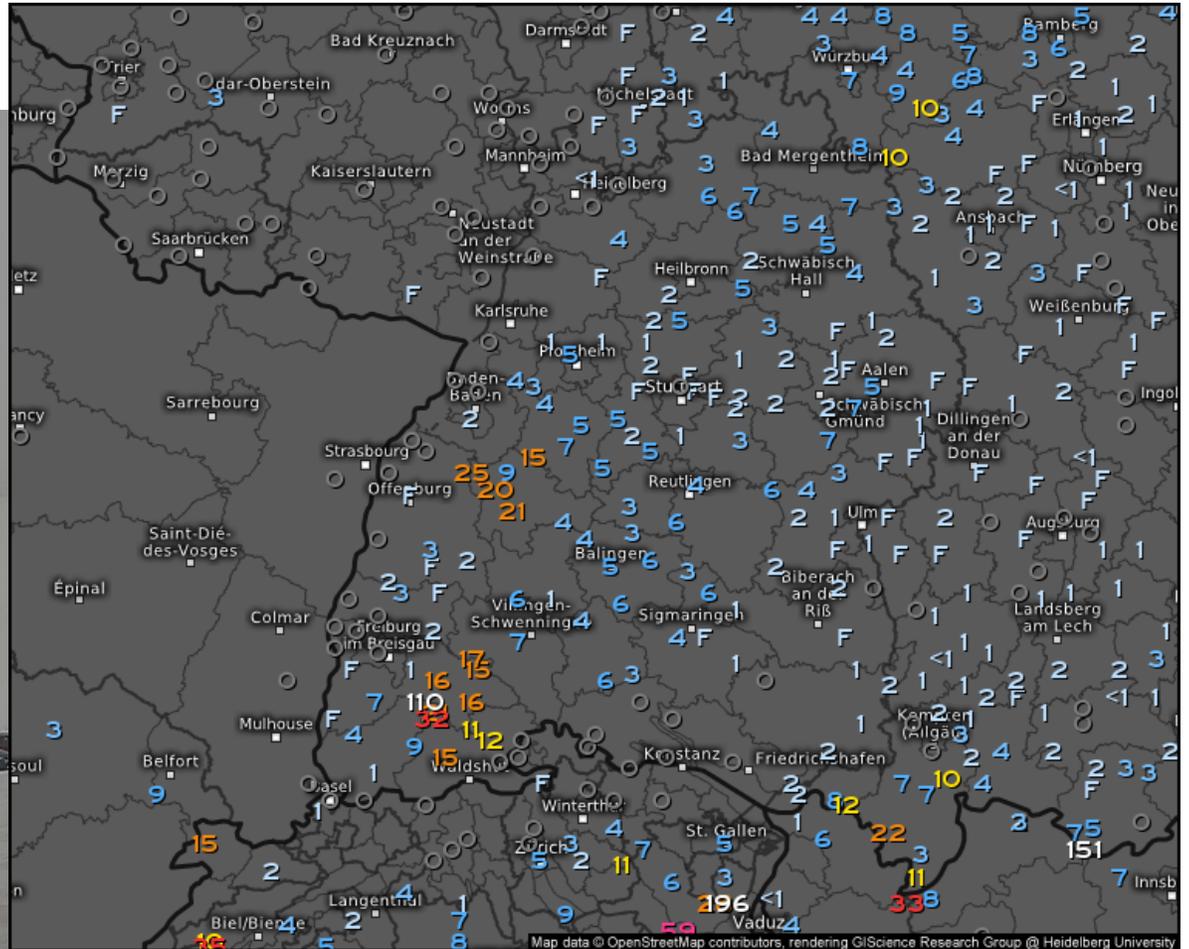


Temperatur 2m (°C)

Do. 19.01.2023, 07:00 Uhr MEZ



Deutschland, 1.362 Stationen im Kartenausschnitt



Schneehöhe (cm)

Do. 19.01.2023, 07:00 Uhr MEZ

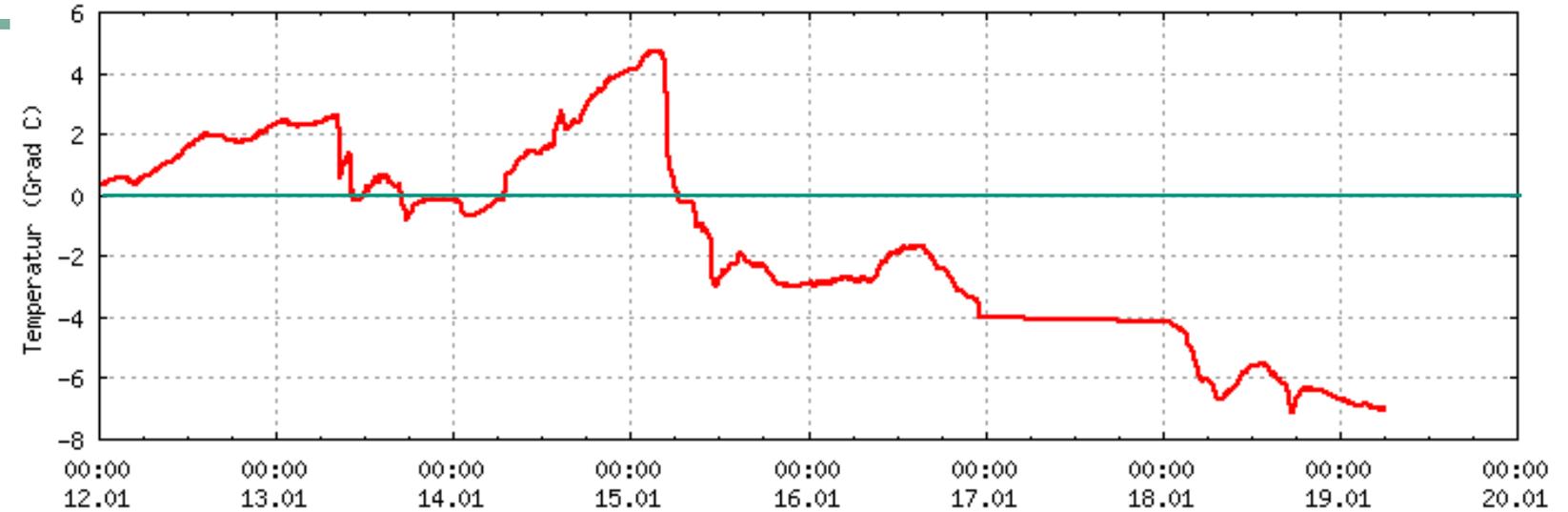


Baden-Württemberg, 413 Stationen im Kartenausschnitt

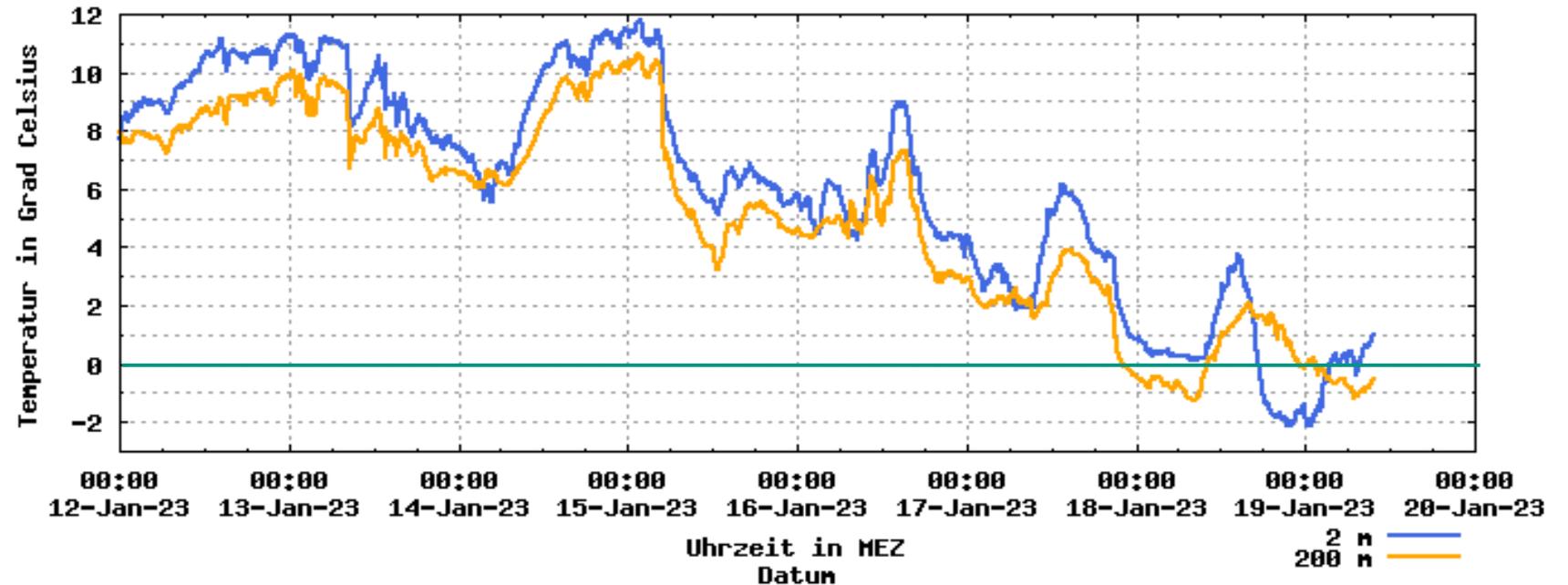


Wetter aktuell

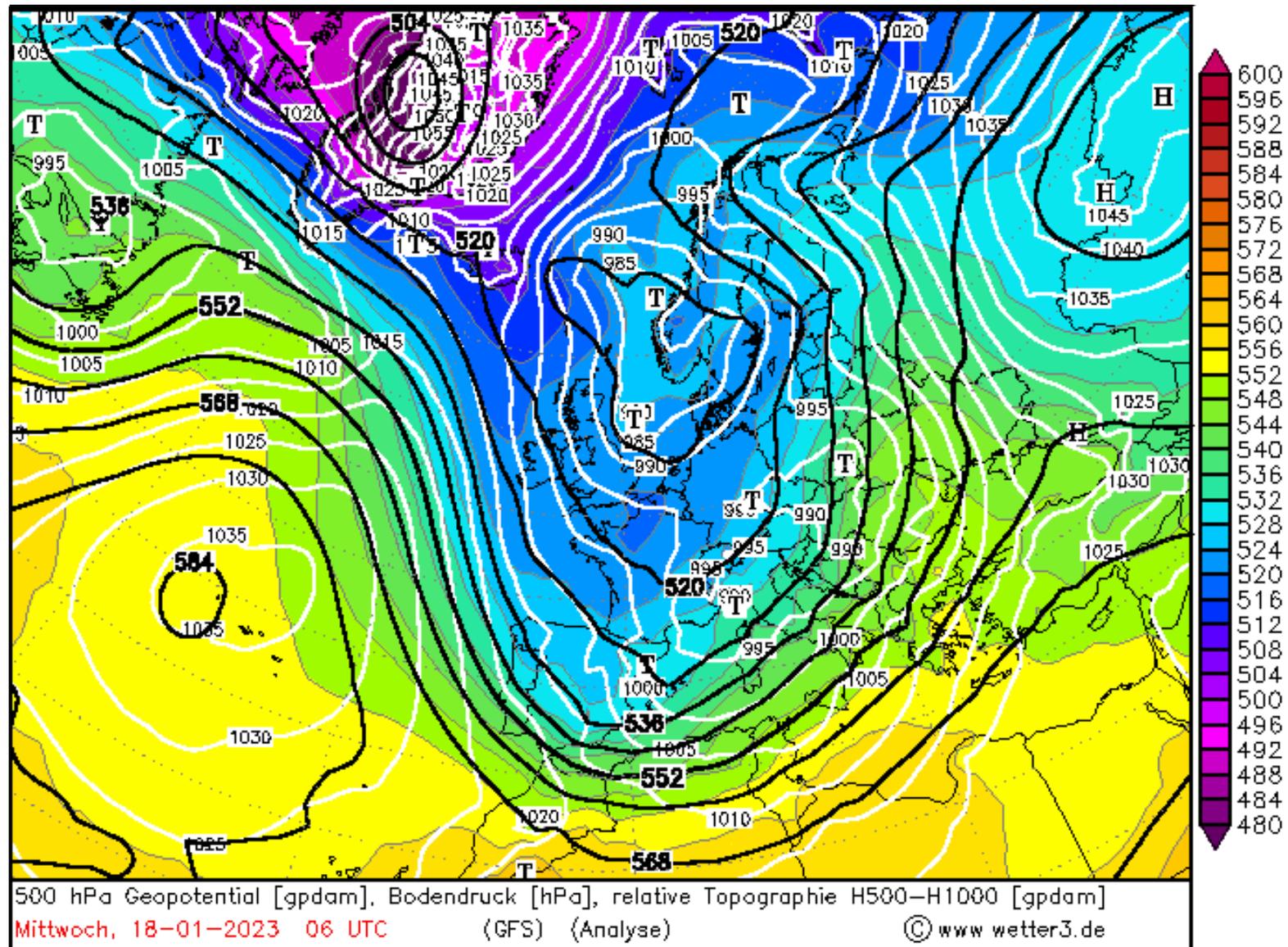
Hornisgrinde



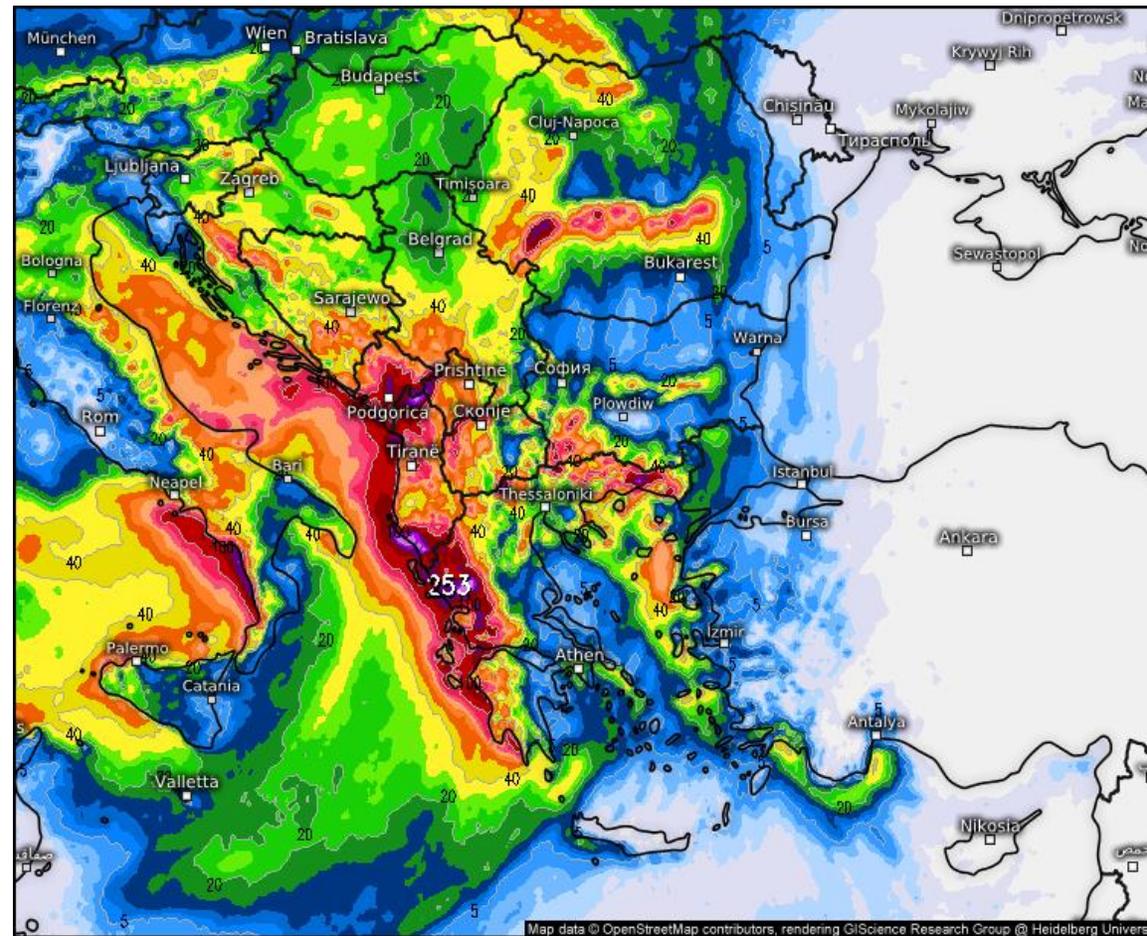
KIT CN



Wetter aktuell

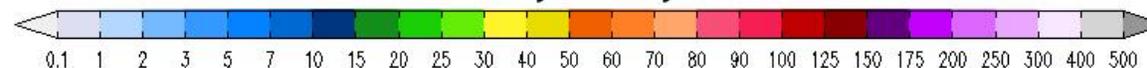


Wettervorhersage: Entwicklung Cut-off / Kaltlufttropfen



Akkumulierte Niederschlagsmenge (mm)

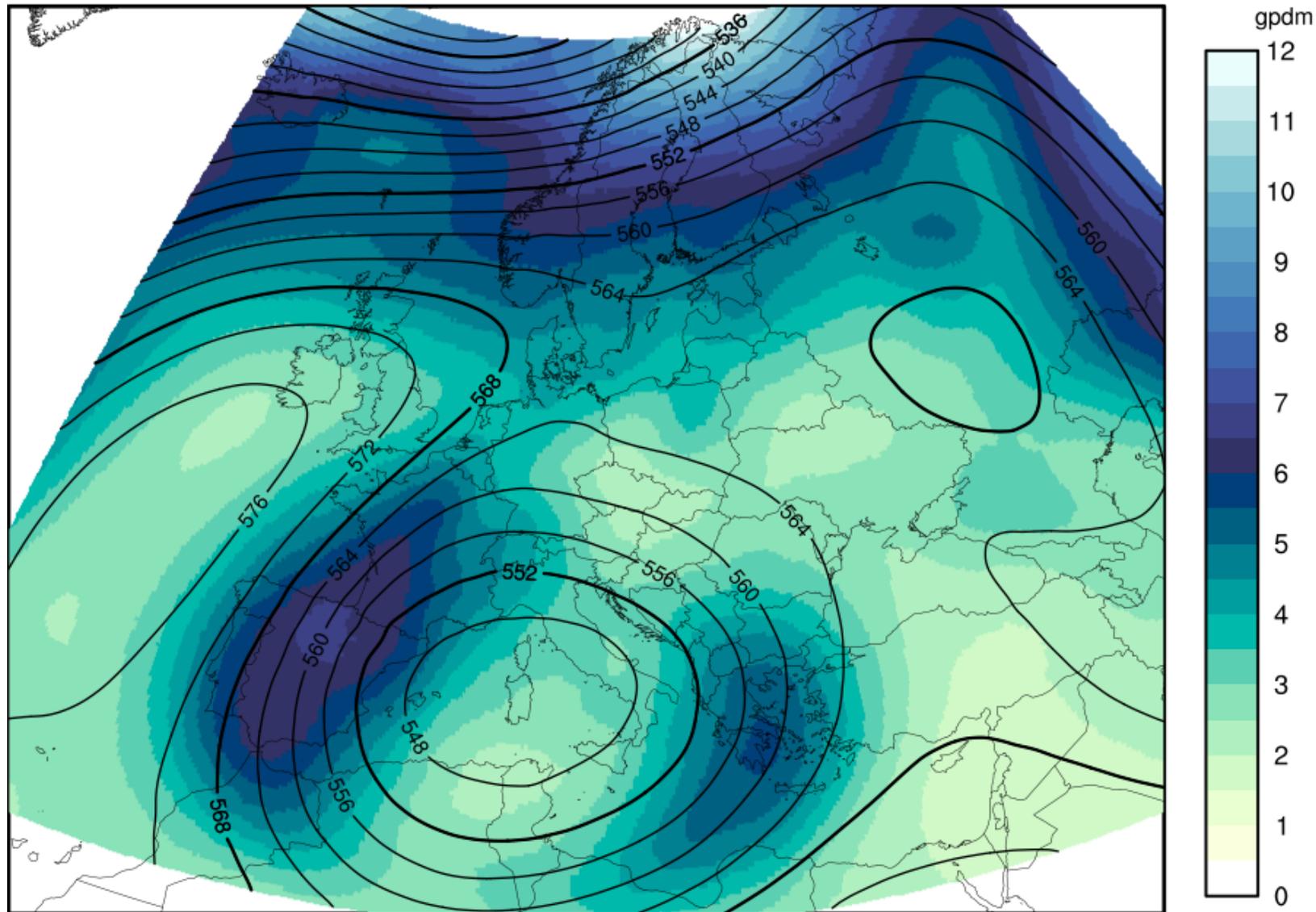
Von Do. 19.01.2023, 01:00 Uhr MEZ
bis Di. 24.01.2023, 01:00 Uhr MEZ



Südosteuropa
Europa HD (5 Tage) vom 19.01.2023/00z

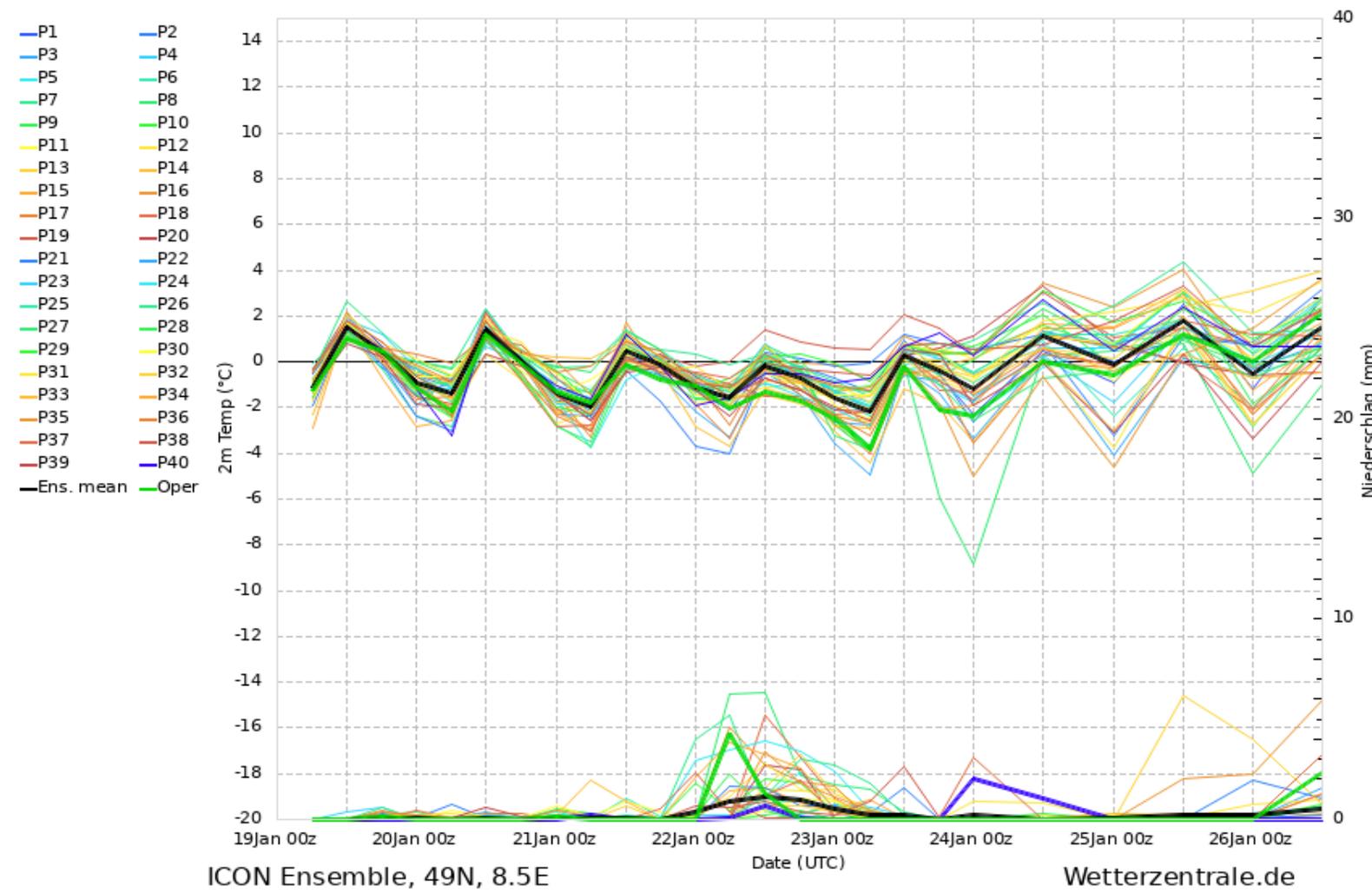


Ensemble Spread

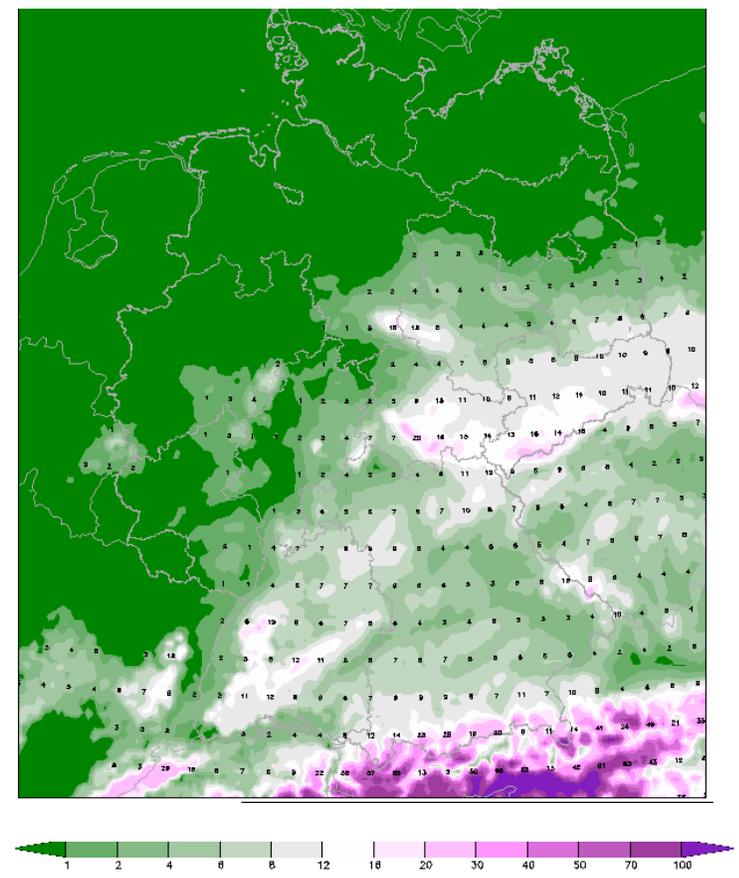


Vorhersage: Ensembles

■ Modell ICON DWD, 40 Ensembleläufe **Gitterpunkt Karlsruhe**



Schneedecke in cm
Sonntag, 22. Jan. 12 Z



Vorlesung „Allgemeine Meteorologie“

Prof. Michael Kunz

Kapitel 7: Einführung in die Dynamik der Atmosphäre



7 Einführung in die Dynamik der Atmosphäre

7.1 Newtonsche Axiome

7.2 Kräfte/Beschleunigungen in der Atmosphäre

7.2.1 Druckgradient-Beschleunigung

7.2.2 Schwere-Beschleunigung

7.2.3 Zentrifugal-Beschleunigung

7.2.4 Reibung

7.2.5 Coriolis-Beschleunigung

7.3 Bewegungsgleichungen

7.4 Skalenanalyse und vereinfachte Balancen

7.4.1 Geostrophischer Wind

7.4.2 Thermischer Wind

7.4.3 Gradientwind

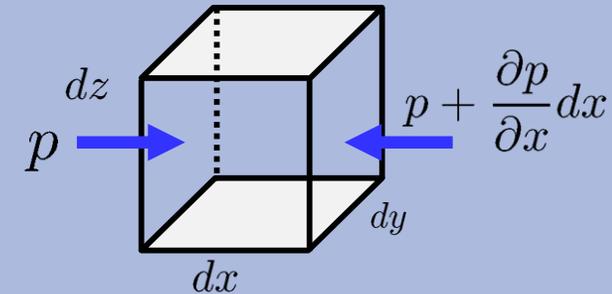
7.4.4 Zyklotropischer Wind

Letzte Vorlesung...

- **Kräfte/Beschleunigung Atmosphäre:** » Druckgradientkraft; » Schwerkraft; » Reibungskraft; » Corioliskraft; » Zentrifugalkraft (nur im Relativsystem!)

- **Druckgradientkraft** pro Masseneinheit (= Beschl.) → Ursache Bewegung in der Atmosphäre

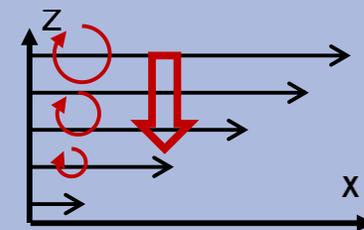
$$\frac{\vec{F}_p}{m} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$



- **Gravitation:** Resultat Gravitation; korrigiert bez. Zentrifugalkraft aufgrund der Erdrotation

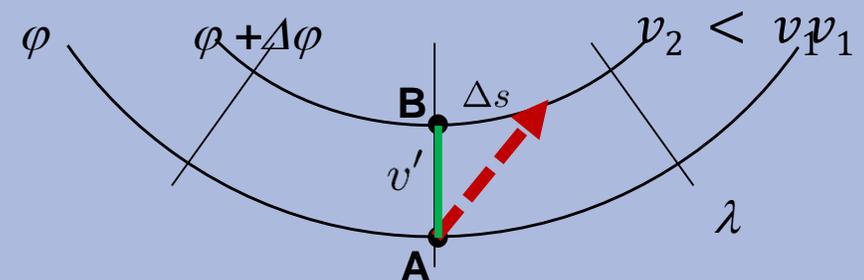
$$\frac{\vec{F}_G}{m} = -g * \vec{k} \quad g = g^* - \frac{V^2}{R}$$

- **Reibung:** entgegengesetzt zu Bewegung; → Prinzip vertikal: Luftteilchen transportieren höheren Impuls (Geschwindigkeit) vertikal Richtung Boden



- **Corioliskraft:** Scheinkraft durch Rotation der Erde;
 - steht senkrecht auf Geschwindigkeitsvektor
 - lenkt Strömungen nach rechts ab (Nordhalbkugel)

meridionale Bewegungen $F_c/m = 2\Omega v \sin \varphi$



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

■ W-O Bewegung bei rotierender Erde (Nordhalbkugel)

- Teilchen in P, das sich mit Geschwindigkeit u nach Osten bewegt, hat absolute Geschwindigkeit: $u_a = \Omega r + u$
- Teilchen erfährt Zentrifugalbeschleunigung:

$$\frac{u_a^2}{r} = \frac{(\Omega r + u)^2}{r} = \Omega^2 r + 2u\Omega + \frac{u^2}{r}$$

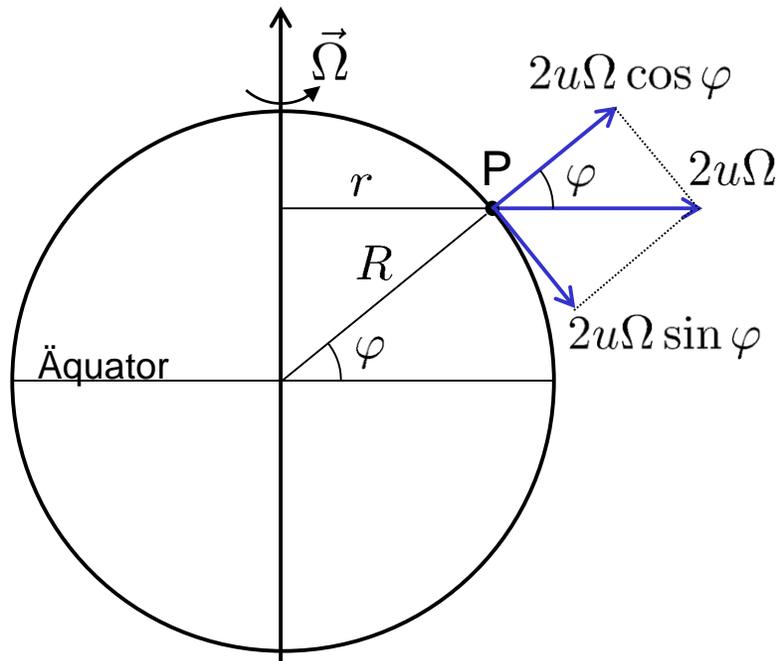
$\Omega^2 r$ wirkt auf alle Teilchen Erdoberfläche (bereits in $g(\varphi)$ berücksichtigt)

$\frac{u^2}{r}$ Zentrifugalkraft bei W-O Bewegung; betragsmäßig sehr klein, wird i.d.R. vernachlässigt ($\sim 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$)

$2u\Omega$ Zerlegung in y/z Komponente;
Vertikalkomponente: $2u\Omega \cos \varphi$
 ~ 3 Größenordnungen $<$ als Gravitation

Horizontalkomp.: $2u\Omega \sin \varphi$

→ **Rechtsablenkung bei W-O Bewegung**



7.2.5 Coriolisbeschleunigung

Resultat der Rotation der Erde

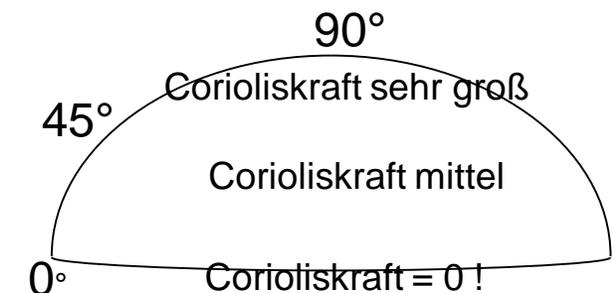
- Corioliskraft ist ein 3-D Vektor mit den drei Komponenten

$$F_{C,x} = 2\Omega(v \sin \varphi - w \cos \varphi)m$$

$$F_{C,y} = -2\Omega u \sin \varphi m$$

$$F_{C,z} = 2\Omega u \cos \varphi m$$

- Vertikale Corioliskraft \ll Schwerkraft (3 Größenordnungen), daher in Näherung vernachlässigbar
- Corioliskraft ist **linear abhängig** von der **Geschwindigkeit** (u,v); bei ruhenden Teilchen ist Corioliskraft = 0
- abhängig von der geogr. Breite; da $|F_c| \sim \sin \varphi$, nimmt die Corioliskraft zu hohen Breiten hin zu
- ändert nicht die kinetische Energie der Strömung: **Scheinkraft**
- bei **kleinräumigen Bewegungen** dominieren andere Kräfte



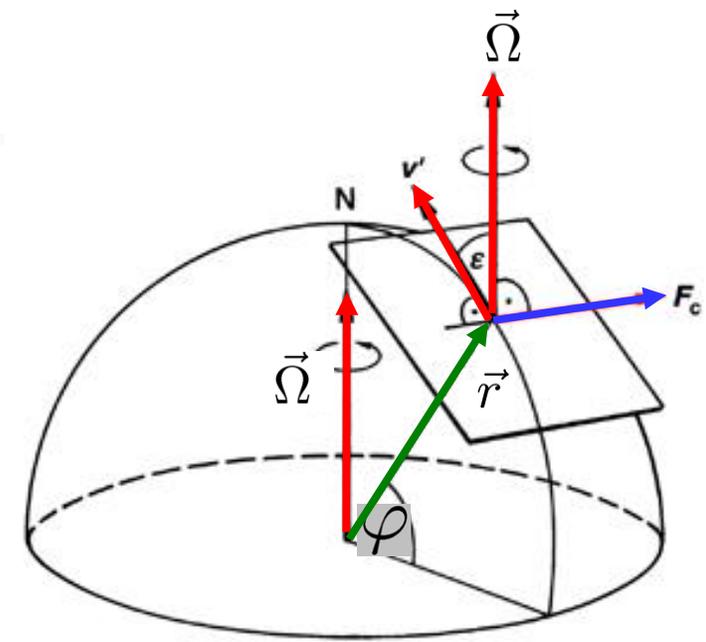
7.2.5 Coriolisbeschleunigung

- Coriolisbeschleunigung steht senkrecht auf Geschwindigkeitsvektor
⇒ Rechtsablenkung der Strömung auf der Nordhalbkugel
- Auf Tangentialebene: Aufspaltung Rotationsvektor in Komponenten:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= 0\vec{i} + \Omega \cos \varphi \vec{j} + \Omega \sin \varphi \vec{k} \\ &= f^* \vec{j} + f \vec{k}\end{aligned}$$

- Am Wichtigsten, da relevant für horizontale Komponenten Corioliskraft:

$$f = 2\Omega \sin \varphi; \quad f(45^\circ) \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$



7.3 Bewegungsgleichungen

Impulsbilanz

- **2. Newtonsches Axiom:** „In einem Inertialsystem ist die individuelle zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der angreifenden Kräfte“ (hier: Beschleunigungen)

- x -Komponente

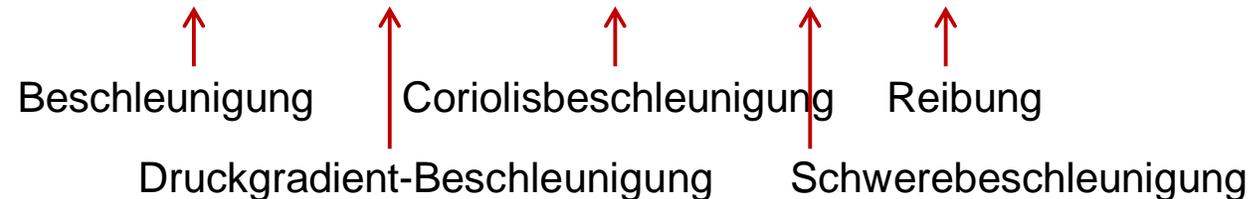
$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega(v \sin \varphi - w \cos \varphi) + a_{Rx}$$

- y -Komponente

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + a_{Ry}$$

- z -Komponente

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi - g + a_{Rz}$$



7.3 Bewegungsgleichungen

Impulsbilanz

- **2. Newtonsches Axiom:** „In einem Inertialsystem ist die individuelle zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der angreifenden Kräfte“ (hier: Beschleunigungen)

- x -Komponente

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + a_{Rx}$$

$$f = 2\Omega \sin \varphi$$

- y -Komponente

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + a_{Ry}$$

- z -Komponente

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + a_{Rz}$$

- In Vektorschreibweise

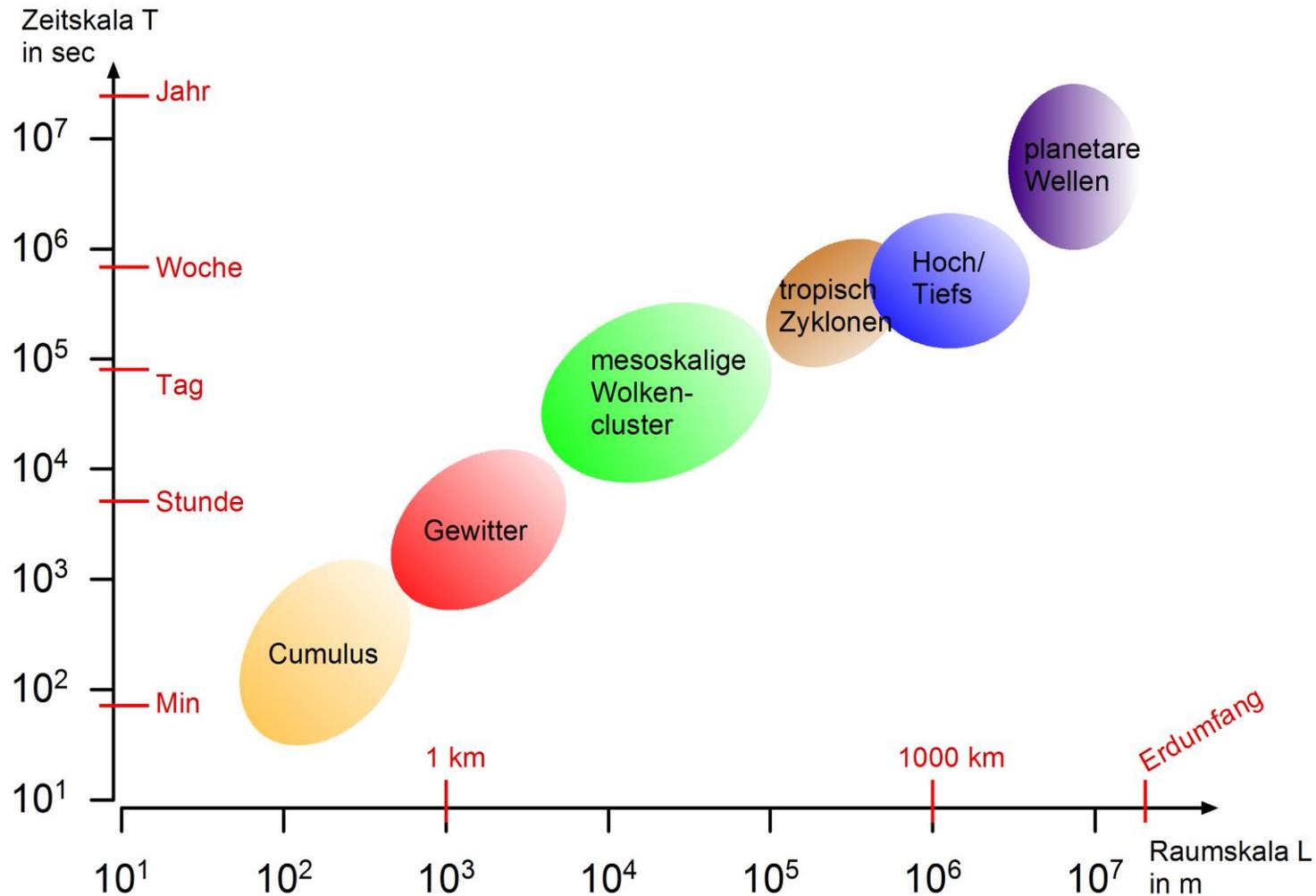
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - f\vec{k} \times \vec{v} - g\vec{k} + \vec{a}_R$$

Fragen über Fragen...

- Welche Kräfte/Beschleunigungen sind bei **großräumigen** Bewegungen (Wettersystemen) entscheidend?
- ...und bei **kleinräumigen** Wetterereignissen?
- Ändert sich die **Rotationsrichtung** zwischen Nord- und Südhemisphäre bei:
 - Tiefdruckgebieten
 - Tropischen Wirbelstürmen
 - Tornados?

7.4 Skalenanalyse und vereinfachte Balancen

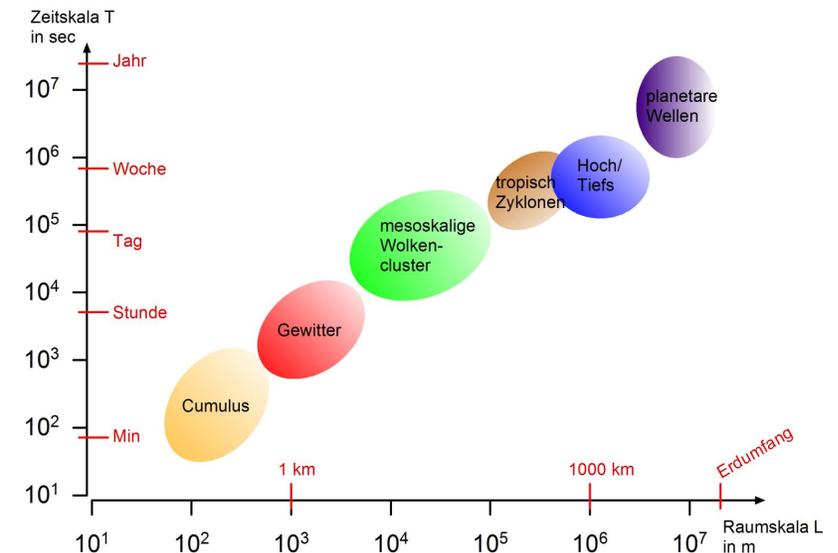
Wettersysteme und ihre Raum- und Zeitskalen



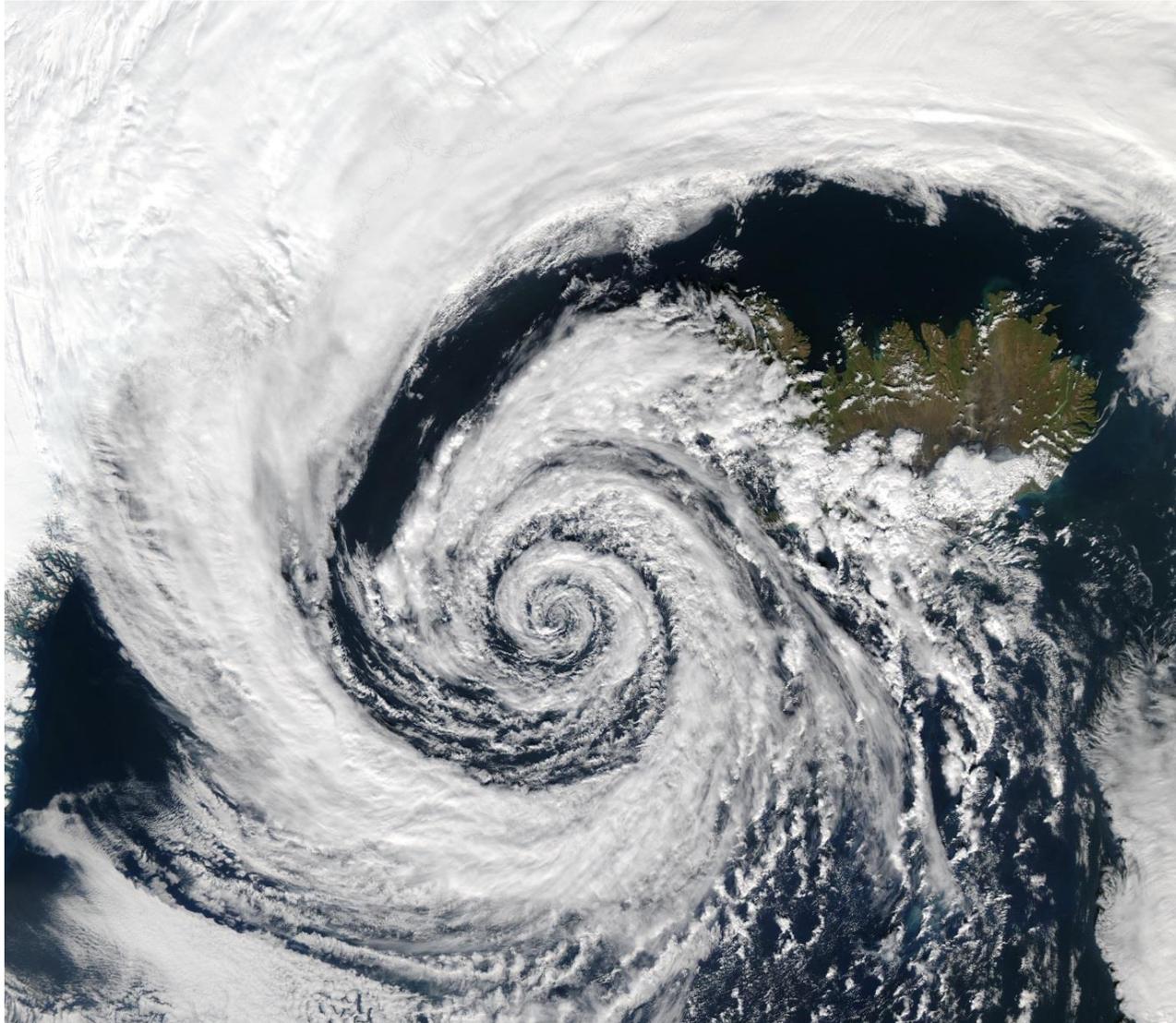
7.4 Skalenanalyse und vereinfachte Balancen

Skalenanalyse: Hintergrund und Ziel

- Bewegungsgleichungen (zusammen mit weiteren Grundgleichungen) beschreiben alle dynamischen Phänomene
 - Analyse und Vorhersage; unabhängig von Raum- / Zeitskalen
 - Aber: keine analytischen Lösungen bestimmbar (nicht-lineare partielle DGL 2. Ordnung)
- Vereinfachte Balancen:
 - Verständnis der Wirkung der Mechanismen / Terme
 - Analytische Lösungen für:
 - Geostrophischen Wind
 - Thermischen Wind
 - Gradientwind
 - Zyklostrophisches Gleichgewicht
- Vorgehen: Abschätzen **der Größenordnungen** (Skalen) der Terme der Bewegungsgleichung je nach **Wettersystemen**



7.5 Skalenanalyse / Balancen großräumiger Systeme



7.5 Skalenanalyse / Balancen großräumiger Systeme

Größenordnungen der einzelnen Variablen in SI-Einheiten

Met. Größe	Bezeichnung	Größenordnung
Horizontalgeschwindigkeit	U, V	10 m s ⁻¹
Vertikalgeschwindigkeit	W	10 ⁻² m s ⁻¹
Länge	L	1000 km = 10 ⁶ m
Zeit	T = L/U	1 Tag ~ 10 ⁵ s
Höhe	H	10 km = 10 ⁴ m
Luftdruckänderung	ΔP	10 hPa = 10 ³ Pa
Bodendruck	P ₀	10 ³ hPa = 10 ⁵ Pa
Luftdichte	ρ	1 kg m ⁻³
Coriolisparameter	F = 2 Ω sin φ	10 ⁻⁴ s ⁻¹
Reibungskraft (-beschl.)	a _{Rx} , a _{Ry} , a _{Rz}	0 m s ⁻²

7.5.1 Hydrostatische Approximation

- Bewegungsgleichung für **Vertikalkomponente W**

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - 2\Omega u \cos\varphi + a_{Rz}$$

$$\sim \frac{W}{T} \quad \sim \frac{1}{\rho} \frac{P_0}{H} \quad \sim g \quad \sim fU \quad \sim 0$$

$$\frac{10^{-2}}{10^5} = 10^{-7} \quad \frac{10^5}{10^4} = 10 \quad 10 \quad 10^{-4} \cdot 10 = 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

- Balance vertikale Druckgradientkraft und Schwerkraft: **hydrostatische Approximation**

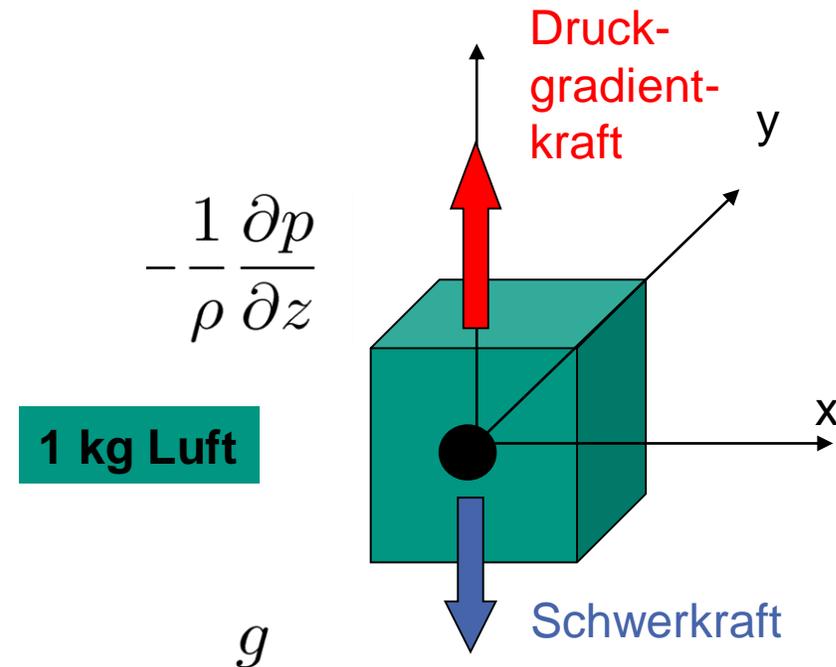
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Bez.	Größenord.
U, V	10 m s ⁻¹
W	10 ⁻² m s ⁻¹
L	10 ⁶ m
T = L/U	10 ⁵ s
H	10 ⁴ m
ΔP	10 ³ Pa
P ₀	10 ⁵ Pa
ρ	1 kg m ⁻³
2 Ω sin φ	10 ⁻⁴ s ⁻¹
a _{Rx} , a _{Ry} , a _{Rz}	0 m s ⁻²

7.5.1 Hydrostatische Approximation

- Balance zwischen
 - vertikaler Druckgradientkraft (senkrecht nach oben gerichtet wegen neg. Vorzeichen)
 - Schwerkraft (zum Erdboden hin gerichtet)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$



7.5.2 Geostrophisches Gleichgewicht

- Bewegungsgleichung für **Horizontalkomponente U (V)**

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi$$

$$\sim \frac{U}{T} \quad \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{L} \quad \sim fU \quad \sim fW$$

$$\frac{10}{10^5} = 10^{-4} \quad \frac{10^3}{10^6} = 10^{-3} \quad 10^{-3} \quad 10^{-6} \text{ m s}^{-2}$$

Bez.	Größenord.
U, V	10 m s ⁻¹
W	10 ⁻² m s ⁻¹
L	10 ⁶ m
T = L/U	10 ⁵ s
H	10 ⁴ m
ΔP	10 ³ Pa
P ₀	10 ⁵ Pa
ρ	1 kg m ⁻³
2 Ω sin φ	10 ⁻⁴ s ⁻¹
a _{Rx} , a _{Ry} , a _{Rz}	0 m s ⁻²

- Balance Druckgradientkraft und Corioliskraft: **geostrophisches Gleichgewicht**

mit $f = 2\Omega \sin \varphi \Rightarrow$

– ... analog für y -Komponente:

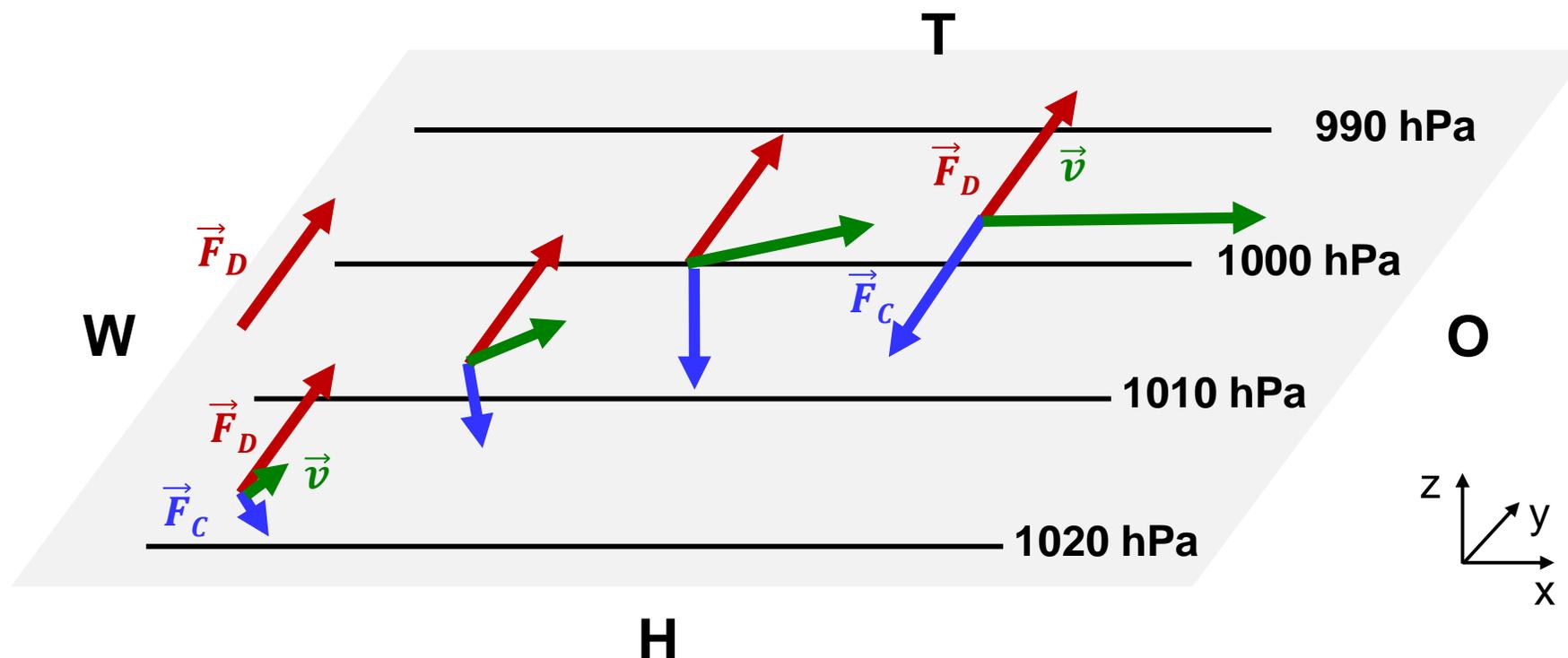
$$\left. \begin{aligned} v_g &= \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u_g &= -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \vec{\nabla}_h p$$

7.5.2 Geostrophisches Gleichgewicht

Entwicklung geostrophisches Gleichgewicht

- Corioliskraft ist senkrecht zur Geschwindigkeit
- Da Corioliskraft proportional zu \vec{v} ist: \rightarrow Corioliskraft nimmt \sim Geschwindigkeit zu
- **Gleichgewicht:** Corioliskraft \vec{F}_C und Druckgradientkraft \vec{F}_D gleicher Betrag, aber entgegengesetzt gerichtet

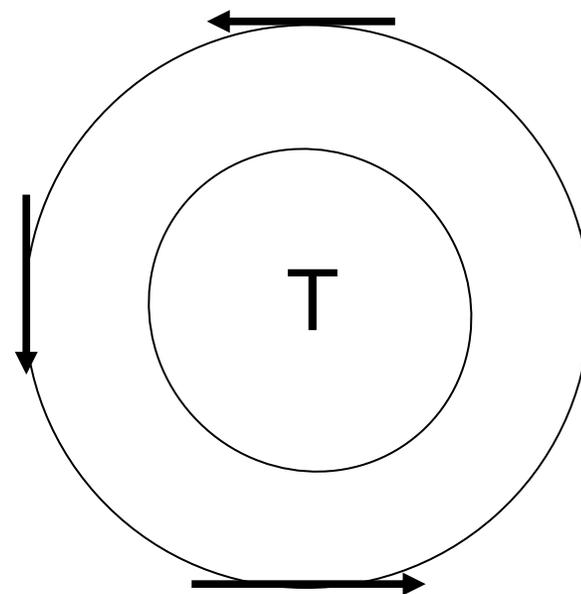
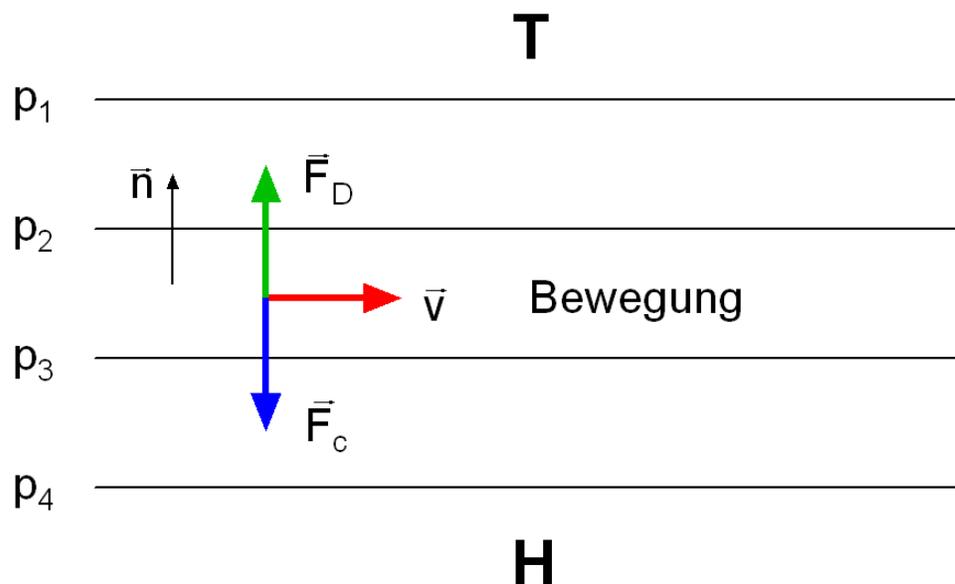


7.5.2 Geostrophisches Gleichgewicht

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_{hp}$$

Eigenschaften des geostrophischen Winds

- beschleunigungsfrei, daher parallel zu geraden Isobaren (Isohypsen)
- proportional zu Druckgradient \rightarrow höchste Windgeschwindigkeit bei stärkster Drängung Isobaren
- ermöglicht keinen Druckausgleich (!)



Fragen über Fragen...

- Wie ändert sich der **geostrophische Wind** (bei gleichem Druckgradienten) bei Südwärtsverlagerung (Nordhemisphäre)??
- Wie ist der geostrophische Wind am **Äquator**?
- Wie kommt es zum Auffüllen von **Tiefdruckgebieten**??

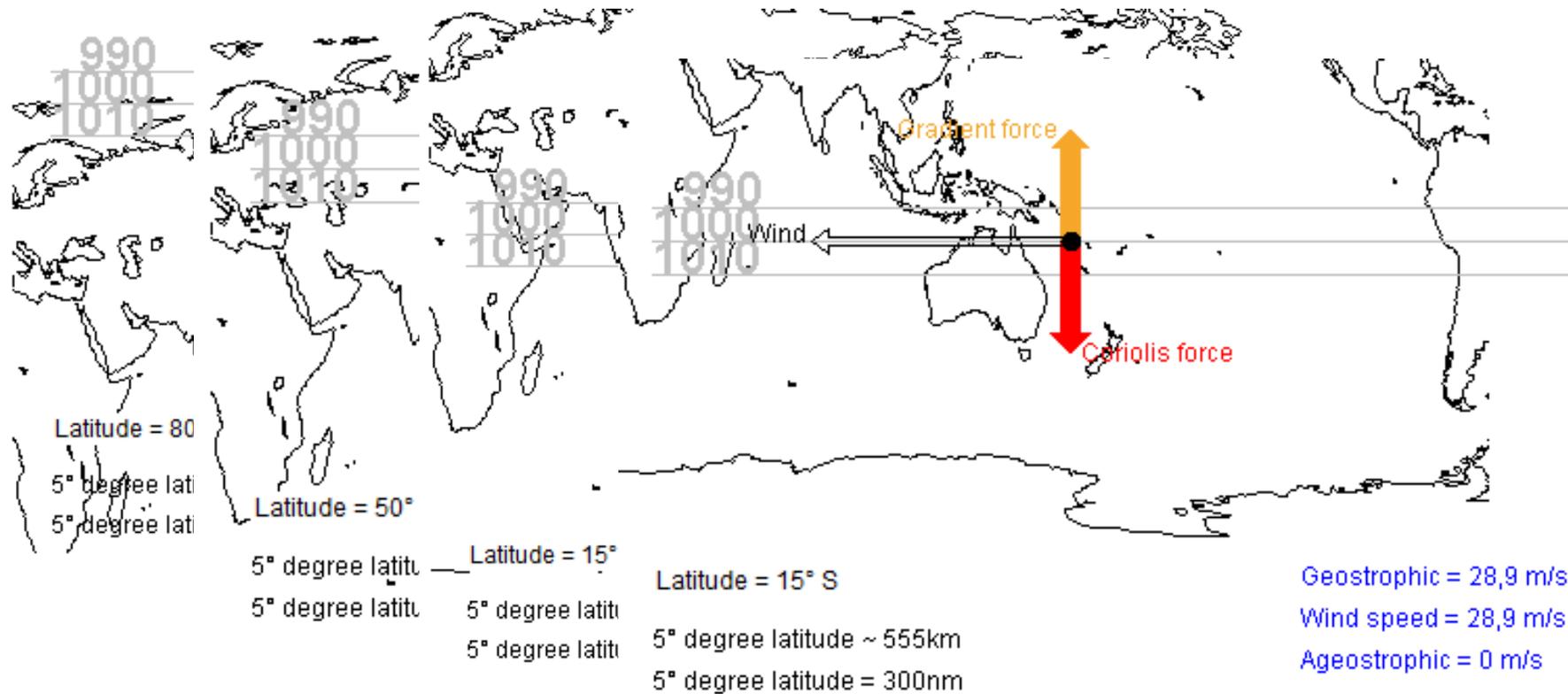
7.5.2 Geostrophisches Gleichgewicht

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -2\Omega u \sin \varphi$$

Druckgradient- Coriolisbeschl.

Geostrophischer Wind vs. geografische Breite

- Wenn gilt: $F_D = F_C = const. \Rightarrow u$ muss Richtung Äquator zunehmen da $\sin \varphi$ mit geografischer Breite abnimmt



Wir fassen zusammen...

- **Corioliskraft:** führt zur Rechtsablenkung bei horiz. Bewegungen (unabhängig von Richtung) auf NH (SH umgekehrt); F_c ist direkt proportional zu $|v|$; wenn $v = 0$, folgt $F_c = 0$; F_c ist am Äquator = 0, an den Polen maximal
- Bewegungsgleichungen: Beschleunigung als Folge der Summe der angreifenden (massenspez.) Kräfte: **Impulsbilanz**
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - f \vec{k} \times \vec{v} - g \vec{k} + \vec{a}_R$$
- **Skalenanalyse:** Abschätzen Größenordnungen (Skalen) der Terme der Bewegungsgleichung abhängig von Wettersystemen, liefert vereinfachte Balancen und analytische Gleichungen
- Skalenanalyse Großräumige Wettersysteme:
 - **Hydrostatische Approximation** in vertikaler Richtung
 - **Geostrophischer Wind** in horizontaler Richtung; Gleichgewicht: Corioliskraft F_c und Druckgradientkraft F_D
- **Eigenschaften** geostrophischer Wind:
 - beschleunigungsfrei, daher parallel zu geraden Isobaren (Isohypsen)
 - proportional zum Druckgradienten
 - nimmt Richtung Äquator zu (Corioliskraft nicht)