Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

Mathematische Grundlagen - Graphen -

Graphentheorie

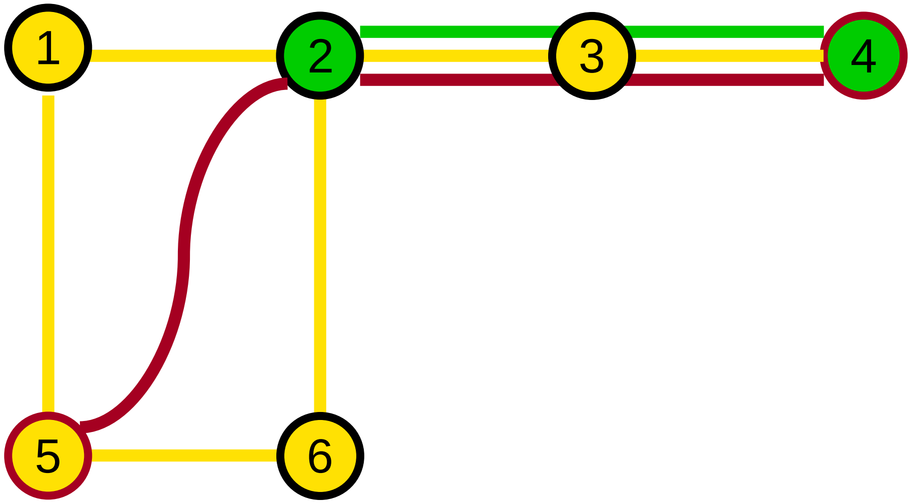
Karlsruhe Institute of Technology

Was ist ein Graph?

- **Graphen** dienen zur **Abstraktion** von Problemen
  → abstrakte **Darstellung** von **Zusammenhängen**
  → **verbundene Objekte** (→ Relationen zwischen Objekten)
- Bei Spielen wie Scotland Yard kommt es beispielsweise für die Strategie nicht darauf an, wie die Wege verlaufen, sondern nur welche Punkte wie miteinander verbunden sind
- **Graphen** stellen das **Problem** durch **Knoten** und **Kanten** dar
- Ein **Graph** muss **mindestens einen Knoten** besitzen
- **Kanten** können **je zwei Knoten** verbinden

Graphentheorie

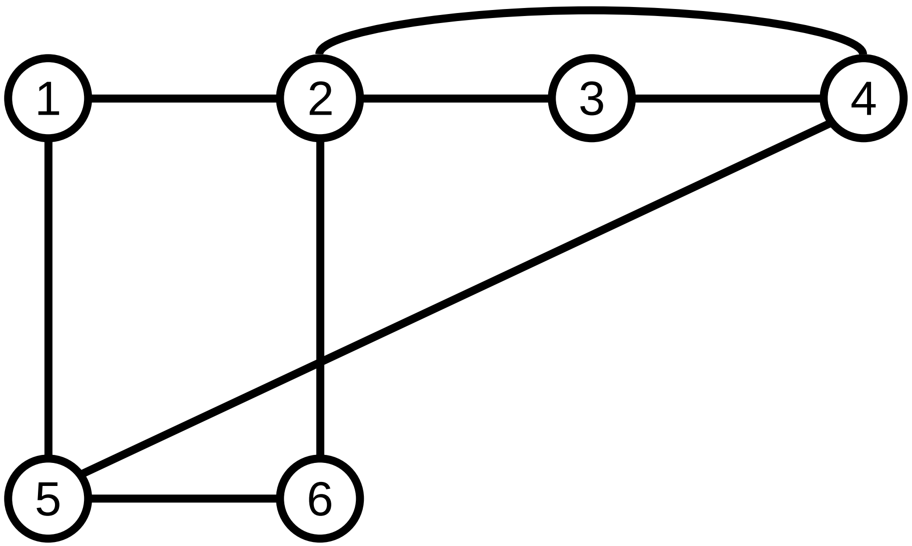
Problemerfassung:



- **Darstellung** der **Zusammenhänge** und **Abhängigkeitsbeziehungen**
- Hervorheben wesentlicher Beziehungen

Graphentheorie

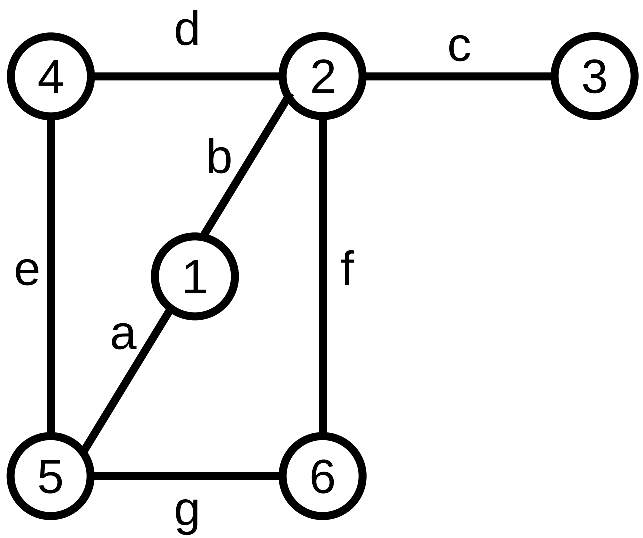
Repräsentation durch einen Graphen:



- **Abstraktion** der **Zusammenhänge** und **Abhängigkeitsbeziehungen**
- Repräsentation der Beziehungen durch direkte Kantenverbindungen

Graphentheorie

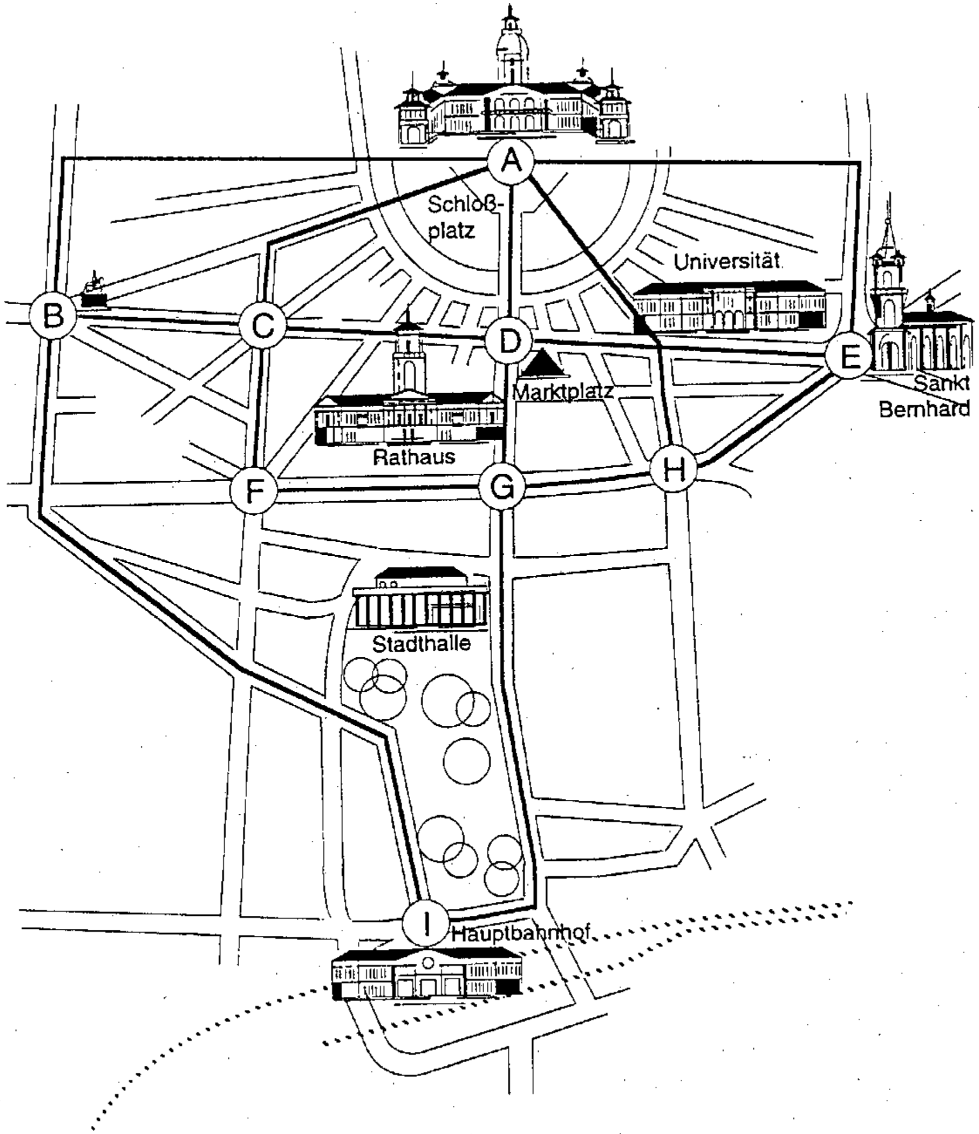
Graph ohne Überschneidungen der Kanten:



- **Weitere Vereinfachung/Optimierung** der Abhängigkeitsbeziehungen
  → **ohne kreuzende Verbindungen**

- Einfügen von Kantenbezeichnern

Graphentheorie: Konkretes Beispiel

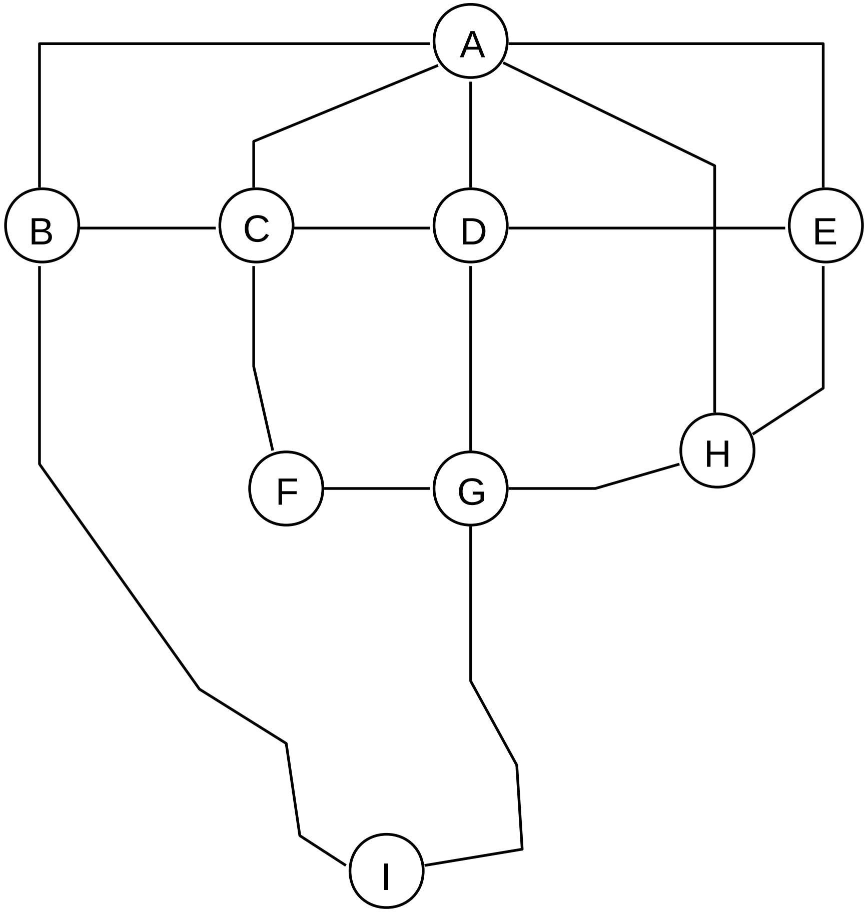


- **Darstellung von Verkehrsbeziehungen im Karlsruher Stadtplan**

  → wichtige **Punkte**

  → wesentliche **Strassen-verbindungen**

Graphentheorie: Konkretes Beispiel

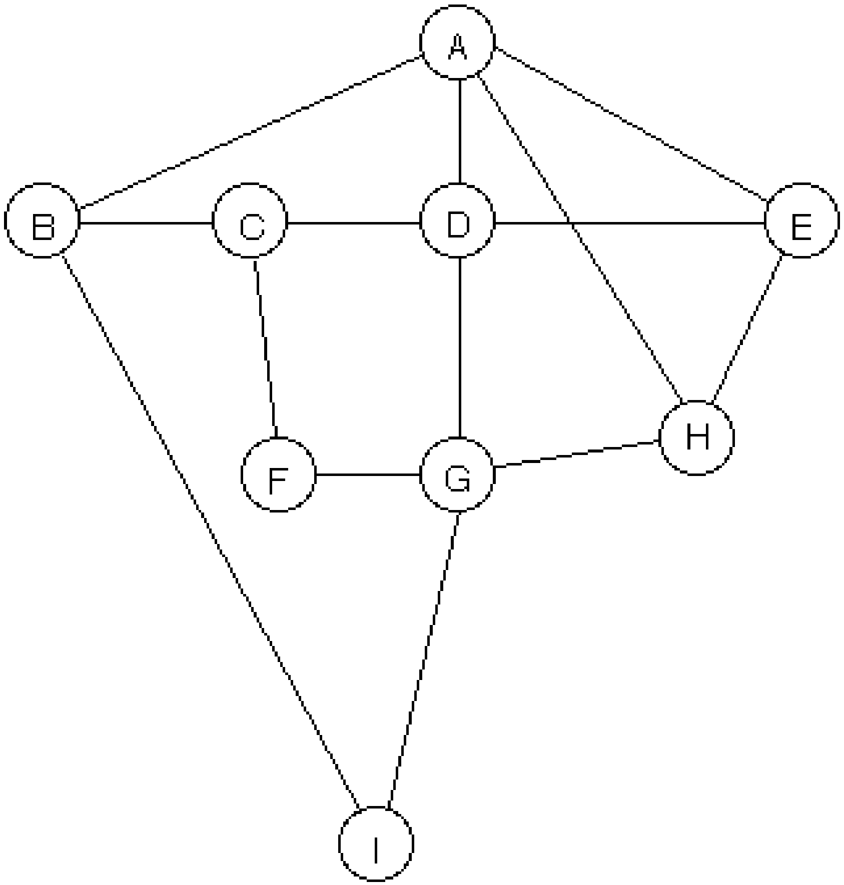


- **Abstrahierte Darstellung der Verkehrsbeziehungen**

  → Weglassen von Details:
  Bottom-up Abstraktion

  → **exakte Geometrie**
  der Verbindungen
  nicht relevant

Graphentheorie: Konkretes Beispiel

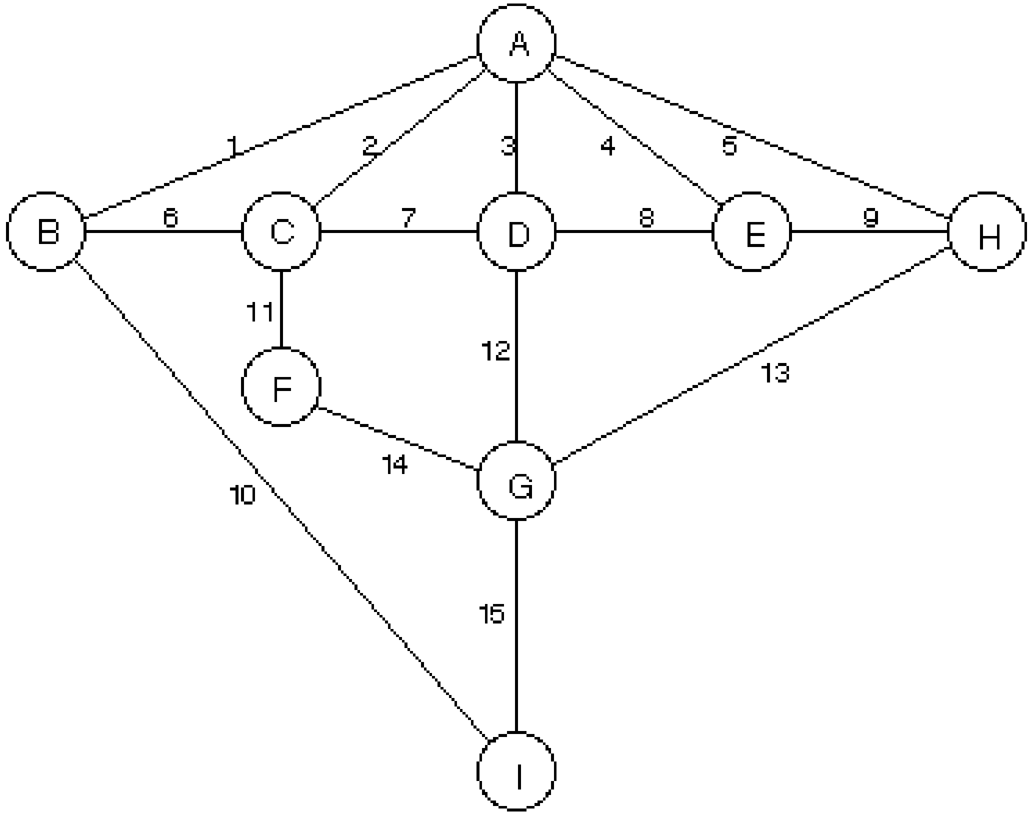


- **Weitere Abstraktion in der Darstellung der Verkehrsbeziehungen**

  → **gerade** Verbindungslinien

  → **Störend in Darstellung:** Kreuzung von Verbindungen

Graphentheorie: Konkretes Beispiel



- **Darstellung ohne kreuzende Verbindungen**

  → **planare** Darstellung

  → Einfügen von Kantenbezeichnern

  → **weiterhin:** **automatisierte** Verarbeitung mit **Graphenalgorithmen**

Graphentheorie: Abstrakter Graph

Formale mathematische Beschreibung:

- **Weitere Abstraktion** von der Bedeutung der Darstellungselemente:
  → Verknüpfung mit der **Begriffswelt** der **Mengen** und **Relationen**

- **Graphen** können ganz **unabhängig** von der **Darstellung** durch **zwei Mengen** und **eine Abbildung** beschrieben werden:
  - **V = Menge der Knoten**
  - **E = Menge der Kanten**
  - **Φ (e)** ordnet **jeder Kante e $\in$ E zwei Knoten aus V** zu
    -> diejenigen, die durch die Kante e verbunden sind

- **G (V, E, Φ)** wird **abstrakter Graph** genannt

Graphentheorie: Abstrakter Graph

Beispiel:

- **V** = { 1, 2, ..., 6 }
- **E** = { a, b, ..., g }
- **Φ:** E → { v, w }   v, w ∈ V

Φ (a) = { 1, 5 }

Φ (b) = { 1, 2 }

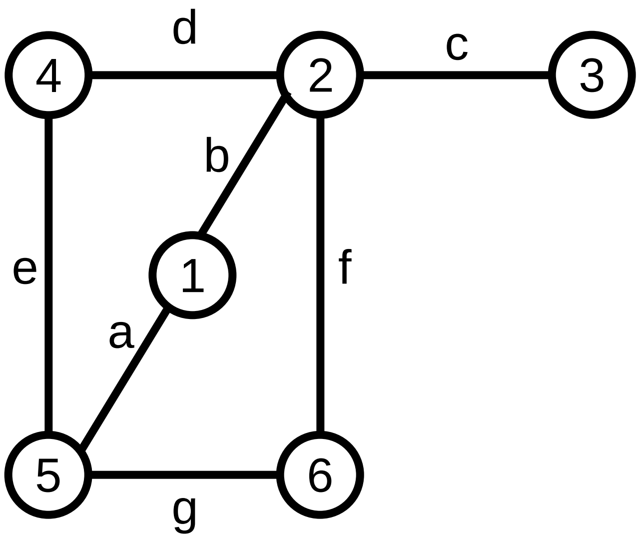
Φ (c) = { 2, 3 }

Φ (d) = { 2, 4 }

Φ (e) = { 4, 5 }

Φ (f) = { 2, 6 }

Φ (g) = { 5, 6 }

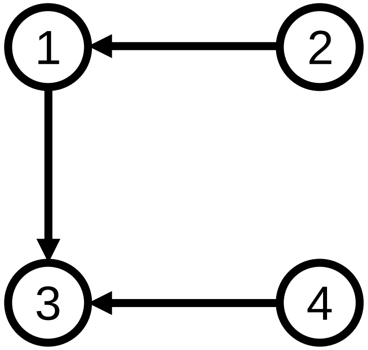


KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Graphentheorie: Gerichteter Graph

Gerichteter Graph:

- Für manche Probleme benutzt man auch **gerichtete Graphen**
  → **Kanten** haben eine **festgelegte Richtung**
- Bei **gerichteten Graphen** gilt:
  Φ bildet **Kanten** auf **geordnetes Knoten-Tupel** aus **V x V** ab
- Ein gerichteter Graph muss mindestens eine Kante zwischen zwei Knoten (g,h) besitzen, so dass keine Kante in umgekehrter Richtung (h,g) existiert
- Gerichtete Graphen werden auch als **Digraphen** bezeichnet

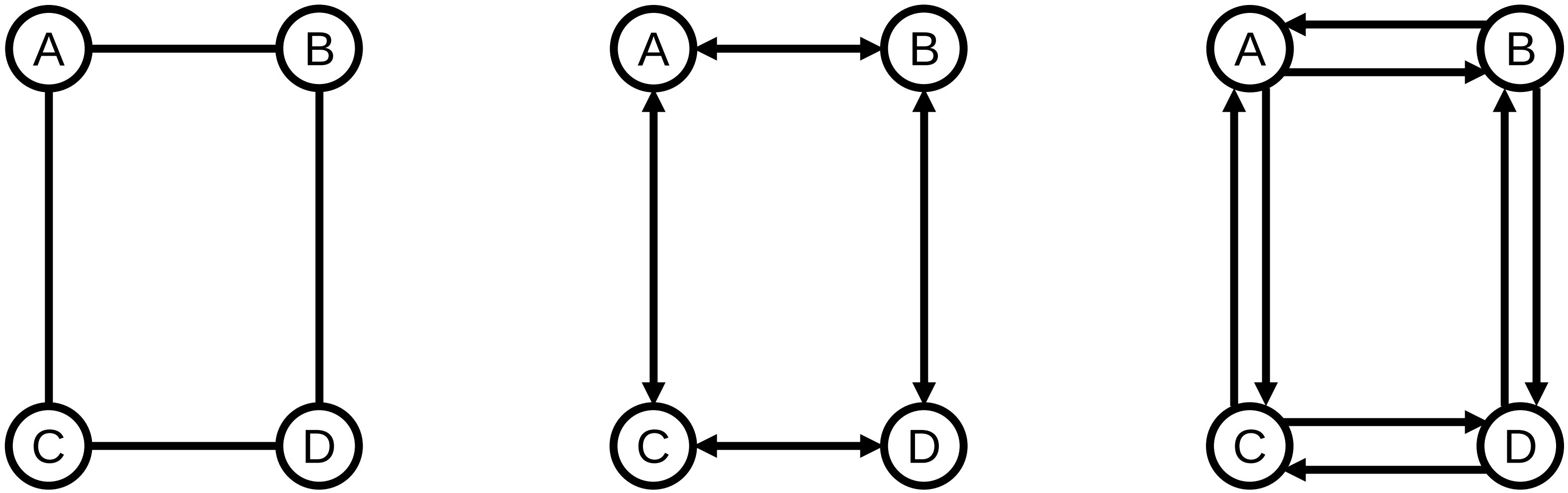


Graphentheorie: Ungerichteter Graph

Ungerichteter Graph:

- **Ungerichtete Graphen**
  → sind **immer** auch mit **gerichteten Kanten darstellbar**
  → zu jeder Kante existiert eine weitere Kante in umgekehrter Richtung

Beispiel:



Graphentheorie: Begriffe

Sprechweisen:

- Verbindet die **Kante e** die **Knoten g** und **h**, so sagt man:
  „**e ist inzident zu g bzw. zu h**“ und schreibt:
  - $\Phi(e) = (g, h)$ für **gerichtete** Graphen
  - $\Phi(e) = \{g, h\} = \{h, g\}$ für **ungerichtete** Graphen
- Φ wird daher **Inzidenzabbildung** genannt
  → Graph lässt sich formal durch eine **Inzidenzmatrix** beschreiben
- die **Knoten g** und **h** heißen **adjazent zur Kante e**
- **Adjazenzmatrix**
  → weitere Möglichkeit zur **formalen Beschreibung** eines Graphen

Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

- Der **Graphentheorie** fehlt es selbstverständlich nicht an **Begriffen**, um die unerschöpfliche Vielfalt der Graphen zu **kategorisieren**

- Im folgenden wollen wir uns nur mit **Graphen** beschäftigen, deren **Mengen V** und **E endlich** sind:

  → **endliche Graphen** (insbesondere für technische Anwendungen)

- Ist die Menge der **Kanten E leer**

  → so handelt es sich um einen **entarteten Graphen**

  → dieser besteht nur aus **isolierten Knoten**

- Wenn zu **je zwei** verschiedenen **Knoten höchstens** eine **Kante** existiert

  → so handelt es sich um einen **einfachen Graphen**

Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

- **Vergleichbarkeit** zweier **Graphen**:

  → es werden **Abbildungen** zwischen **Knoten** und **Kanten** gesucht, so dass die **Inzidenzbeziehungen erhalten** bleiben

- Sind diese Zuordnungen **eineindeutig**

  → so wird der **Graph isomorph** genannt

- **Isomorphie** von Graphen:

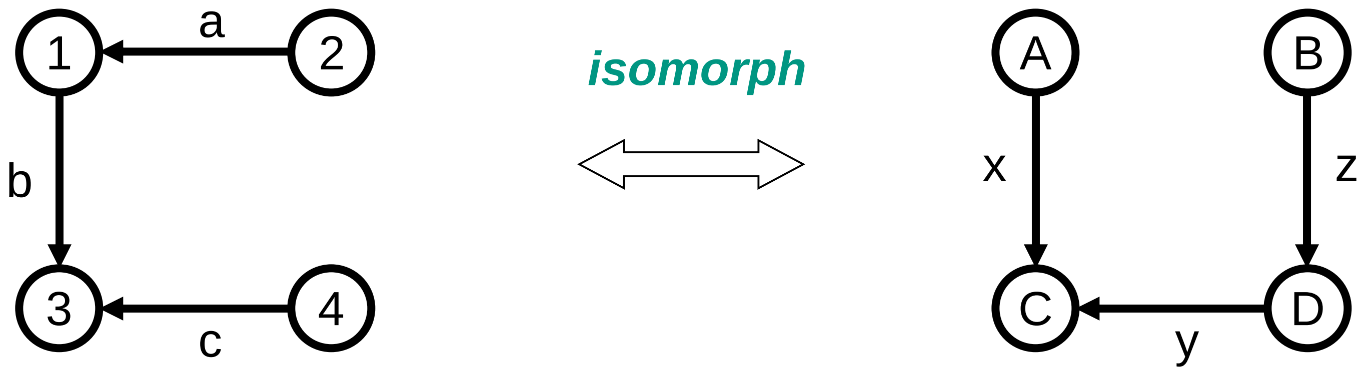
  → **Strukturen** isomorpher Graphen sind **gleich**

  → wichtige Eigenschaft in der **Vergleichbarkeit** und **formalen Verifikation digitaltechnischer Schaltungen** und Systeme

Graphentheorie: Begriffe

Beispiel: Isomorphie

- Die Folgenden Graphen sind **isomorph**



- **Zuordnung der Knoten φ:** $(1,2,3,4) \Rightarrow (D,B,C,A)$
- **Zuordnung der Kanten ψ:** $(a,b,c) \Rightarrow (z,y,x)$
- **Inzidenzbeziehungen:**

$$\Phi(a) = (2,1) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\psi(a)) = \Phi(z) = (B,D) = (\varphi(2), \varphi(1))$$
$$\Phi(b) = (1,3) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\psi(b)) = \Phi(y) = (D,C) = (\varphi(1), \varphi(3))$$
$$\Phi(c) = (4,3) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\psi(c)) = \Phi(x) = (A,C) = (\varphi(4), \varphi(3))$$

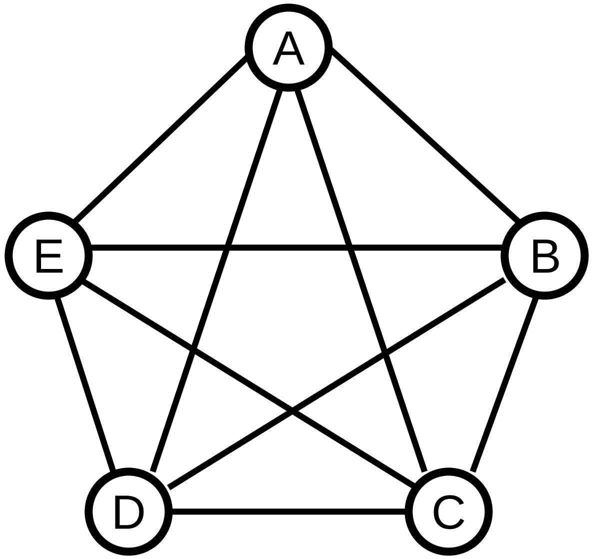
Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

Vollständigkeit von (Sub-) Graphen

- sind je **zwei verschiedene Knoten** durch eine **Kante verbunden**, so ist der (Sub-) Graph **vollständig** → (Sub-) Graph ist **Clique**

Beispiel:



Graphentheorie: Begriffe

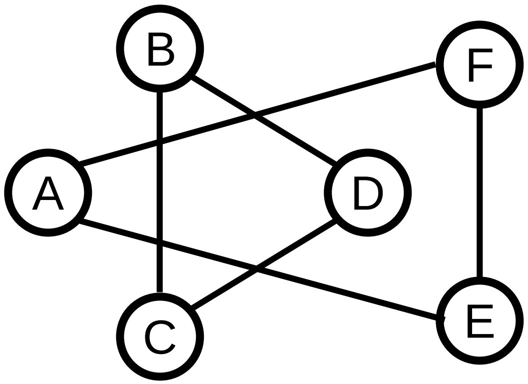
Globale Charakterisierung von Graphen:

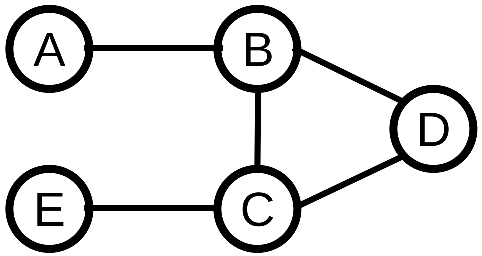
Zusammenhängende Graphen

- durch Folgen von Kanten und Knoten kann man von jedem beliebigen Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten des Graphen gelangen
  → der **Graph** ist dann **zusammenhängend**

- Ist der Graph **nicht zusammenhängend**
  → so besteht er aus **mindestens zwei Teilgraphen**

Beispiele: **nicht zusammenhängend** **zusammenhängend**





Graphentheorie: Begriffe

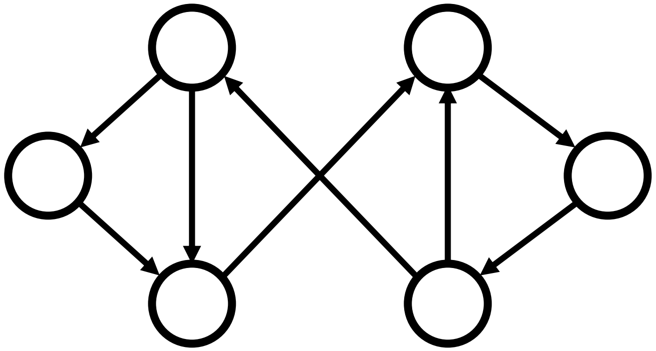
Globale Charakterisierung von Graphen:

Streng zusammenhängende Graphen

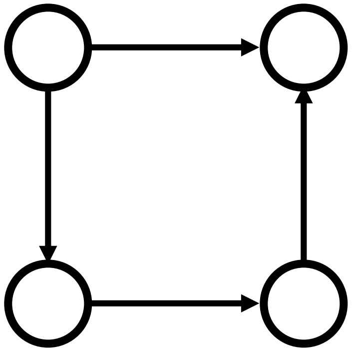
- **Gerichtete Graphen** bezeichnet man als **zusammenhängend**, wenn der zugehörige **ungerichtete Graph zusammenhängend** ist
- Findet man zusätzlich von jedem beliebigen Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten eine **gerichtete Folge von Kanten** (Weg unter Einbezug der Richtungen!) → so ist der **Graph streng zusammenhängend**

Beispiele:

streng zusammenhängend



nicht streng zusammenhängend



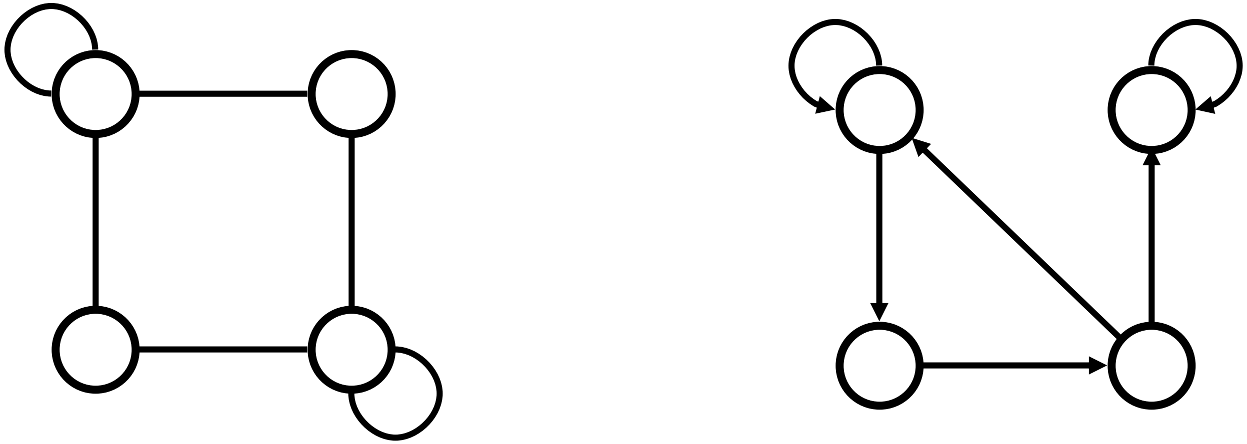
Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Schlinge

- Verbindet eine Kante einen Knoten mit sich selbst, so wird diese als **Schleife** oder **Schlinge** bezeichnet
- $\Phi(e) = (g,g)$

Beispiele:



KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Mehrfachkanten

- Existieren **mehrere Kanten** zwischen zwei Knoten g und h, so heißen diese **parallel** bzw. **Mehrfachkanten**

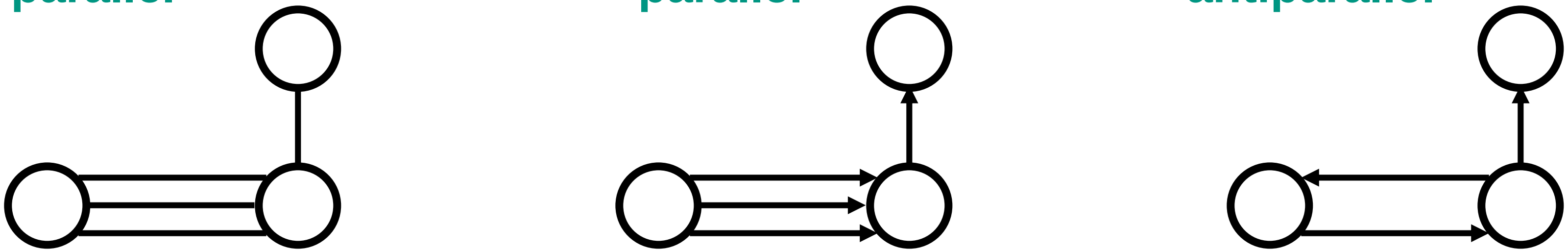
$$\Phi(e) = \Phi(f) = \{g,h\} \text{ bzw. } (g,h) \qquad e \neq f$$

- Bei **gerichteten Graphen** nennt man Kanten **antiparallel**, falls sie zwei Knoten in entgegengesetzter Richtung verbinden

$$\Phi(e) = (g,h) \qquad \Phi(f) = (h,g)$$

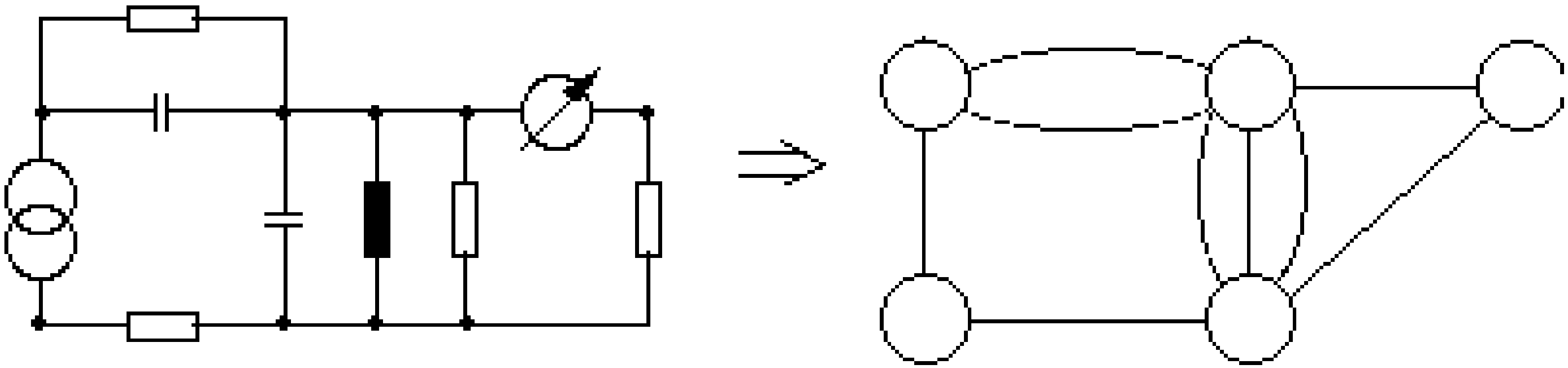
Beispiele:

parallel **parallel** **antiparallel**



Graphentheorie: Begriffe

Technisches Beispiel: Mehrfachkanten



Analoger Schaltkreis:

- **Mehrfachkante** als Abbild **schaltungstechnischer Merkmale**
- Bauteile **parallel** geschaltet

Graphentheorie: Begriffe

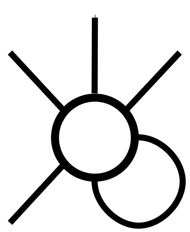
Lokale Eigenschaften von Graphen:

Grad eines Knotens

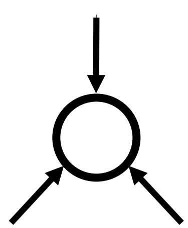
- Betrachtet man einen **Knoten**, so wird die **Anzahl** der damit **inzidenten Kanten** als **Grad d(g)** des Knotens bezeichnet

- Bei **gerichteten Graphen** unterscheidet man zusätzlich
  - abgehende Kanten $\Rightarrow$ **Ausgangsgrad $d^+(g)$**
  - von ankommenden Kanten $\Rightarrow$ **Eingangsgrad $d^-(g)$**

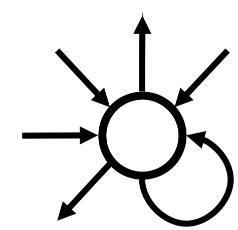
Beispiele:



$d(g) = 6$



$d^-(g) = 3$



$d^+(g) = 3$
$d^-(g) = 4$

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Unmittelbare Nachbarschaft von Knoten

- Sind **zwei Knoten** durch **eine Kante** verbunden
  → so sind die Knoten **unmittelbar benachbart**

- **Menge** der **unmittelbar benachbarten Knoten**
  → wird mit **V'(g)** bezeichnet

- Bei **gerichteten Graphen** gilt:
  → die Menge der benachbarten Knoten wird **entsprechend** der Richtungen der Kanten eingeteilt in:
  → **unmittelbare Vorgänger** $V'_1(g)$ und
  → **unmittelbare Nachfolger** $V'_2(g)$

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Unmittelbare Nachbarschaft:

→ **mengenalgebraische Eigenschaften**

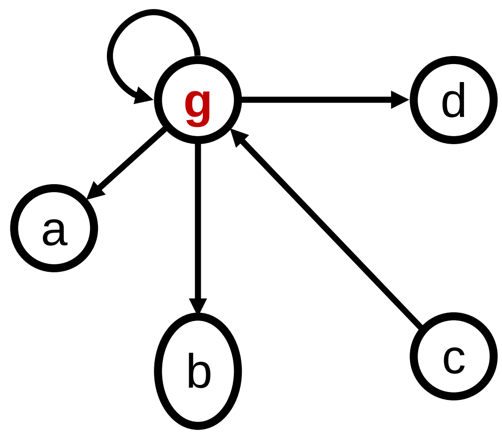
- Für die **Mengen** der **unmittelbaren Nachbarn** gilt:
  - $|V'_1(g)| = d^-(g)$
  - $|V'_2(g)| = d^+(g)$
  - $V' = V'_1 \cup V'_2$

- Da jedoch Knoten sowohl Vorgänger als auch Nachfolger sein können, gilt:
  - $|V'(g)| \leq d(g)$

Graphentheorie: Begriffe

Beispiel: **Unmittelbare Nachbarschaft des Knotens g**

- **Vorgänger:** $V'_1(g) = \{ c, g \}$
- **Nachfolger:** $V'_2(g) = \{ a, b, d, g \}$
- **$V'(g)$** $= \{ a, b, c, d, g \}$
- **$d^-(g)$** $= | V'_1(g)| = 2$
- **$d^+(g)$** $= | V'_2(g)| = 4$
- **$d(g)$** $= d^-(g) + d^+(g) = 6$
- **$|V'(g)|$** $= 5$



Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Mittelbare Nachbarschaft von Knoten

- Schwächt man die Forderung so ab, dass nur eine **Folge** von **Kanten zwischen zwei Knoten** existieren muss
  → so sind die Knoten **mittelbar benachbart**

- Nützlich ist die mittelbare Nachbarschaft besonders bei gerichteten Graphen bzgl. der Unterscheidung in
  → **mittelbare Vorgänger** und
  → **mittelbare Nachfolger**

- **Beispiel:** Stammbaum
  → die Frage nach der Abstammung in direkter Linie ist eine Frage nach mittelbaren Vorgängern

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Artikulation eines Graphen

- Bei der **Modellierung** von technischen Systemen mit Graphen werden
  → **Komponenten** häufig durch **Knoten** dargestellt
  → **Verbindungen** zwischen Komponenten durch **Kanten** abgebildet

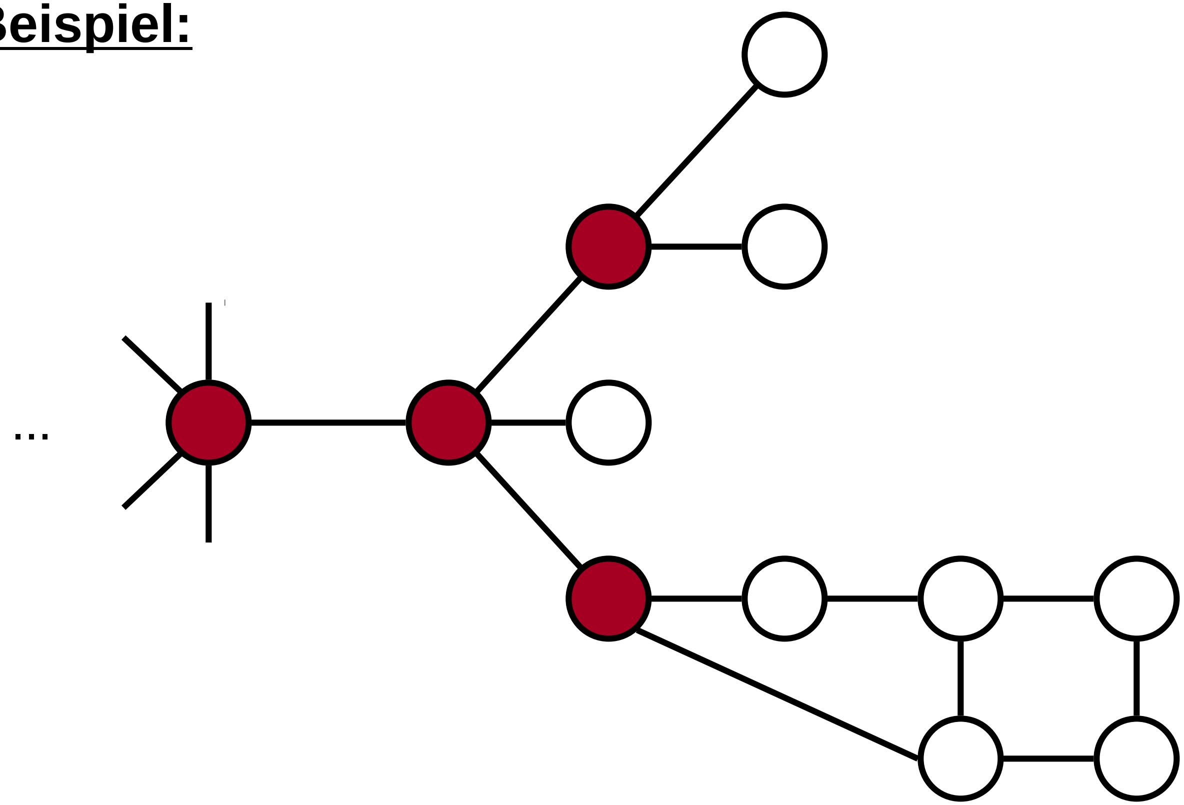
- Der **Ausfall** einer **Komponente**
  → entspricht dem **Entfernen** eines **Knotens** aus dem Graphen

- Besonders **kritisch** bei Ausfall einer Komponente (Knoten):
  → Graph **zerfällt** in **zwei nicht zusammenhängende Teilgraphen**
  → solche **kritischen Knoten** erhalten den Namen **Artikulation**

- Die **Artikulationen** eines Graphen repräsentieren **kritische Systemstellen**

Graphentheorie: Begriffe

Beispiel:



Graph mit **Artikulationen**

Graphentheorie

Spezielle Kantenfolgen in Graphen:

- Bereits bei der mittelbaren Nachbarschaft haben wir uns dafür interessiert, ob Knoten über **Kantenfolgen** verbunden sind

- **Definition:** **Kantenprogression** der **Länge n**

  → **endliche Folge** von **n nicht** notwendigerweise **verschiedenen Kanten (e^i),** die n + 1 nicht notwendigerweise verschiedene Knoten (g^i) verbinden

  $$\Phi(e^i) = (g^i, g^{i+1}) \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n$$

- Sind in einer **Kantenprogression alle Knoten (g^i)** voneinander **verschieden** und damit auch alle Kanten, so heißt sie **einfach**

- Je nachdem, ob der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist ($g^1 = g^{n+1}$), oder ob es sich um einen gerichteten Graphen handelt, verwendet man unterschiedliche Bezeichnungen

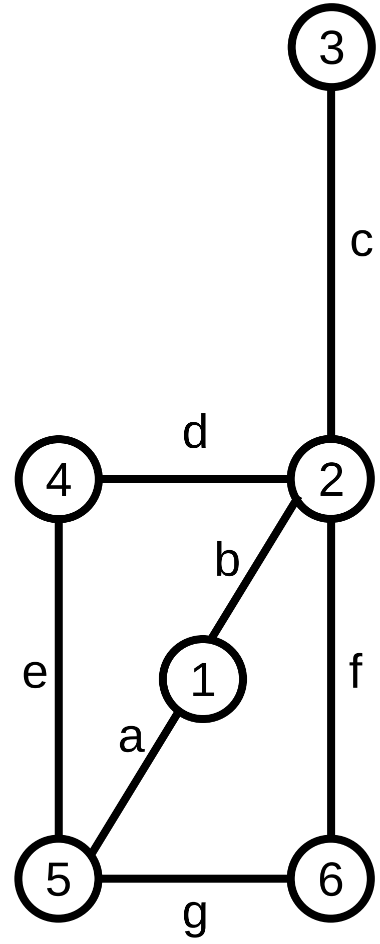
Spezielle Kantenfolgen in Graphen

Ungerichteter Graph		**Gerichteter Graph**	
$g^1 \neq g^{n+1}$	$g^1 = g^{n+1}$	$g^1 \neq g^{n+1}$	$g^1 = g^{n+1}$
offene Kanten-progression	geschlossene Kanten-progression	offene Kanten-progression	geschlossene Kanten-progression
Sind alle Kanten einer Progression voneinander verschieden			
Ketten-progression	geschlossene Kantenzug-progression	Weg-progression	Zyklus-progression
Berücksichtigt man die Kanten einer Progression ohne Ordnung			
Kette	geschlossener Kantenzug	Weg	Zyklus

Spezielle Kantenfolgen in Graphen

Beispiele am ungerichteten Graphen:

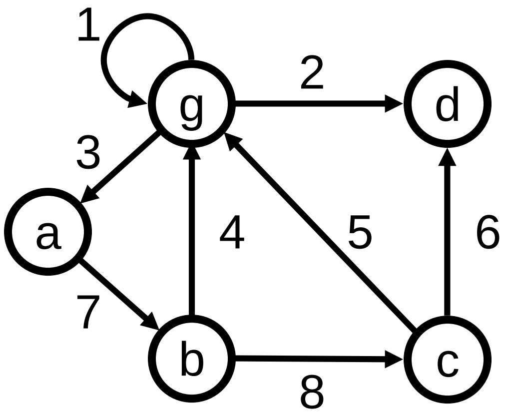
Folge	Merkmal
g-f-c-c-d	**offene** Kantenprogression
d-c-c-b-a-e	**geschlossene** Kantenprogression
e-g-f	**Kettenprogression**
a-b-f-g	**geschlossene Kantenzugprogression**
{ e, b, a }	**Kette**
{ g, d, f, e }	**geschlossener Kantenzug**



Spezielle Kantenfolgen in Graphen

Beispiele am gerichteten Graphen:

Folge	Merkmal
4-3-7-4	**offene** Kantenprogression
3-7-4-1-1	**geschlossene** Kantenprogression
4-1-2	**Wegprogression**
5-1-3-7-8	**Zyklusprogression**
{ 2, 8, 5, 1 }	**Weg**
{ 1 }	**Zyklus**



Graphentheorie

<u>Spezielle Graphen:</u>

Begriff des **Zyklus/Zyklen** in Graphen:

- Für viele Algorithmen, die auf Graphen arbeiten ist es wichtig zu wissen, ob es möglich ist, mit unterschiedlichen Kanten „im Kreis zu laufen“

- Man bezeichnet einen kompletten **Graphen** als **zyklisch**, wenn
  → wenigstens eine **geschlossene Kantenzugprogression** (= **Zyklus**) existiert in diesem Graphen
  → eine **Schleife** ist ebenfalls ein **Zyklus**

- Wenn ein **Graph nicht zyklisch** ist
  → nennt man ihn **zyklenfrei** oder **azyklisch**

Graphentheorie

Spezielle Graphen:

Baum

- **Definition:** **Baum**
  → ein **zusammenhängender, zyklenfreier** Graph

- **Also:** bei einem **ungerichteten Baum**
  → es darf **kein geschlossener Kantenzug** existieren

- **Weiterhin:** bei einem **gerichteten Baum** gilt:
  → es darf **kein Zyklus** existieren
  → der zugehörige ungerichtete Graph
  muss **zusammenhängend** sein

Graphentheorie

Spezielle Graphen: Bäume

Definition: Wurzel und Blätter

- In einem **gerichteten Baum**

  → gibt es genau einen **Knoten**, der **keine Vorgänger** hat

  $d^- = 0$

  → dieser Knoten wird **Wurzel** genannt

- Die Knoten ohne Nachfolger ($d^+ = 0$) heißen **Blätter**

- Bei einem **ungerichteten Baum**

  → kann die **Wurzel** frei gewählt werden

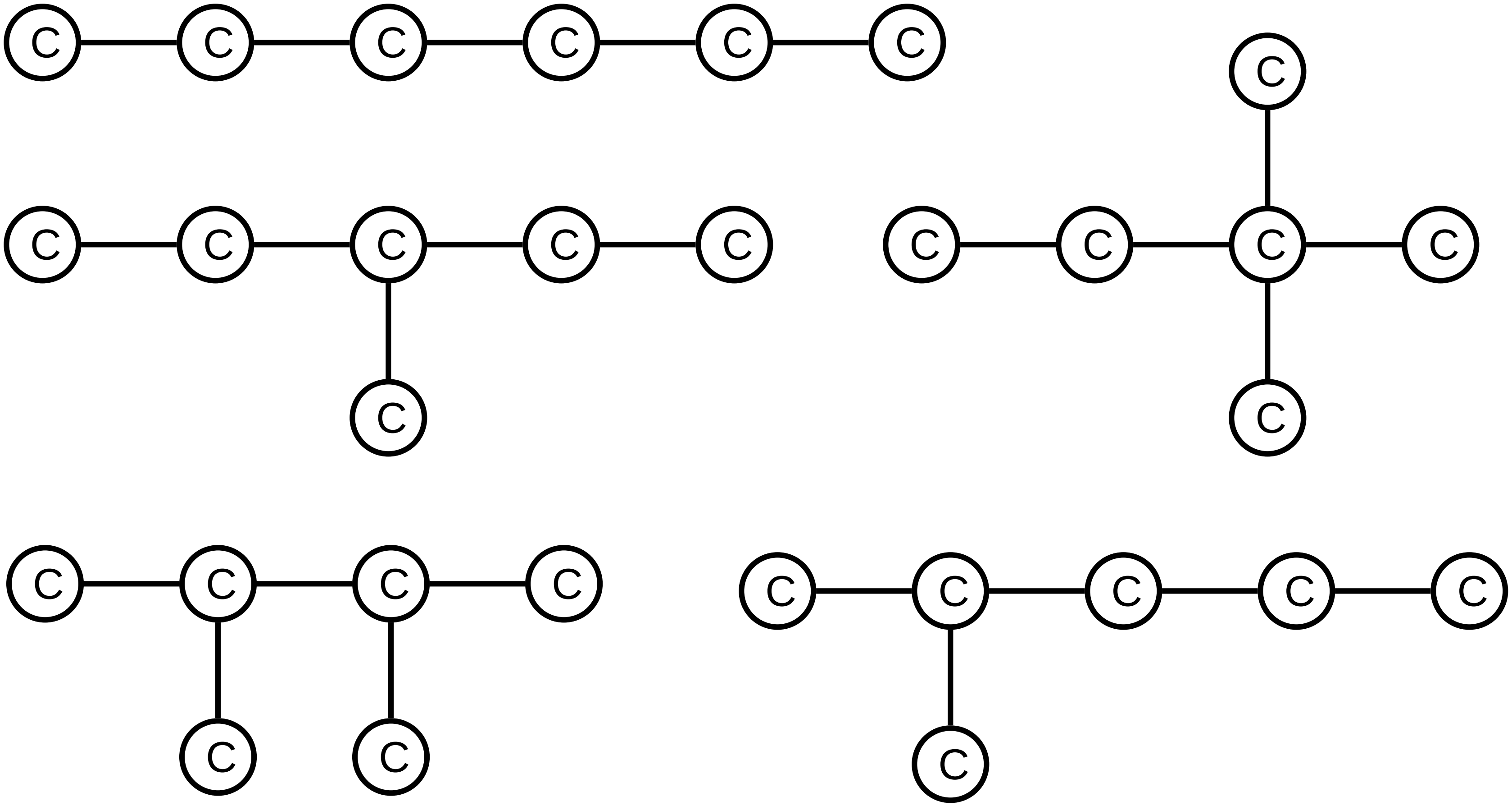
  → daraus ergeben sich die **Blätter**

  als übrige **Knoten** mit **Knotengrad eins**

Graphentheorie

Beispiel: ungerichteter Baum

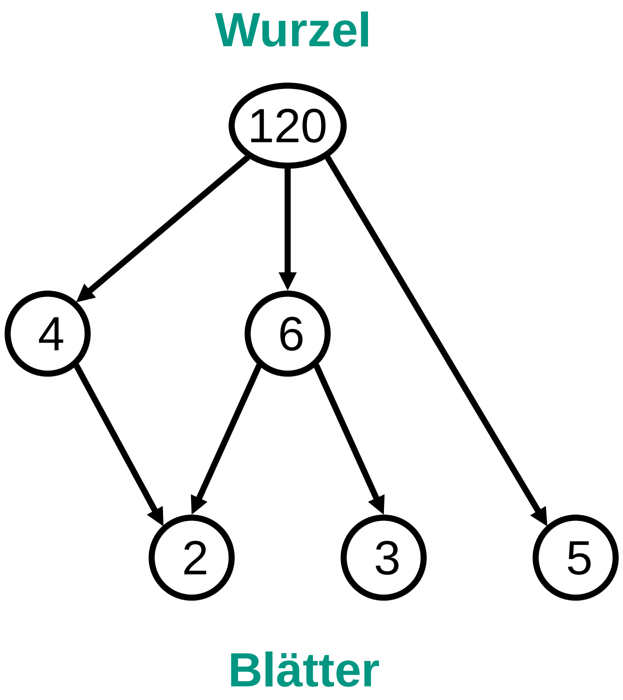
- Die **Molekülstrukturen** der **Hexane** ergeben **ungerichtete Bäume**

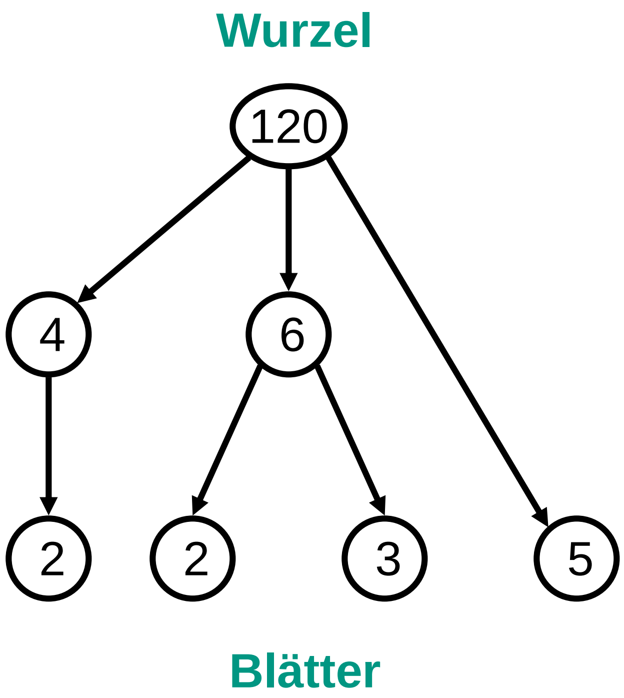


Graphentheorie

Beispiel: **gerichteter Baum**

- Die **Relation „ist teilbar durch“** führt zu einem gerichteten Baum

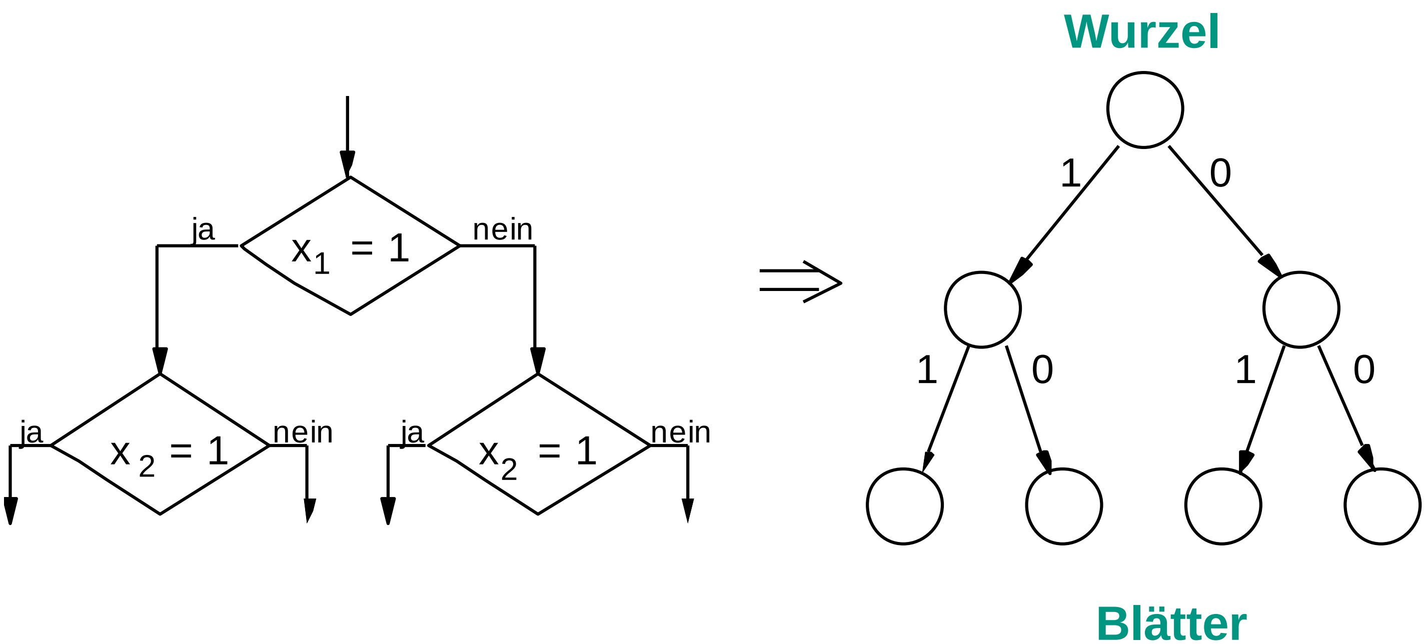




Graphentheorie

Definition: Binärbaum

- Hat jeder Knoten eines Baumes, außer den Blättern, **genau zwei** Nachfolger: **$d^+(g) = 2$**, so heißt ein solcher Baum **Binärbaum**



Graphentheorie

Weitere Begriffe: **Binärbaum**

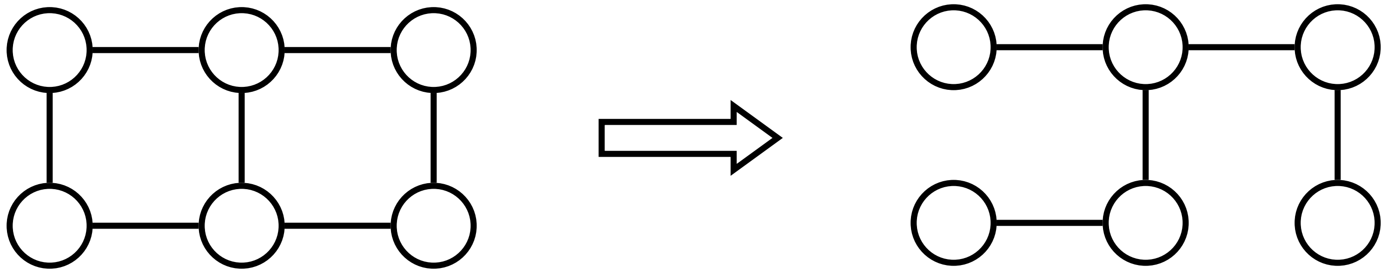
- Der **Abstand** von der **Wurzel** zu den **Blättern**
  → wird als **Tiefe** des **Baumes** bezeichnet
- Ist der Abstand von der **Wurzel** zu den **Blättern** für alle Blätter **identisch**
  → so handelt es sich um einen **symmetrischen** Binärbaum
- Unterscheiden sich die Abstände um maximal eins
  → so nennt man den **Baum ausgeglichen**

Graphentheorie

<u>Definition:</u> Aufspannender Baum

- **<u>Es gilt:</u>** bei jedem **zusammenhängenden Graphen** kann man **alle Zyklen** durch **gezieltes Entfernen** von **Kanten** auflösen (→ *Kruskal Algorithmus*: <u>M</u>inimal <u>A</u>ufspannender <u>B</u>aum, MAB) **ohne** dass der Graph in **zwei Teilgraphen zerfällt**
- Auf diese Weise erhält man zu jedem beliebigen Graphen einen zugehörigen **aufspannenden Baum**

<u>Beispiel:</u>



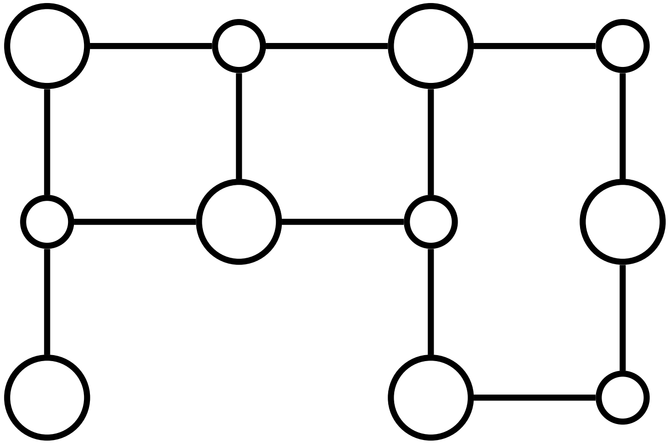
Graphentheorie

Definition: **Bipartiter Graph**

- **Knoten** eines **Graphen** sind folgendermaßen in **zwei Teilmengen** aufteilbar:
  → **keine Kante** verbindet **zwei Knoten** in **derselben Teilmenge**
  → so nennt man den **Graphen bipartit**

- **In technischen Systemen:**
  → **zwei Teilmengen** entsprechen bspw. **zwei** verschiedenen **Typen** von **Komponenten**, die nicht untereinander verbunden werden dürfen

Beispiel:



Graphentheorie

Definition: Geometrische Graphen

- Bisher hatte die **Darstellung** der **Knoten** und **Kanten** des Graphen in der Zeichenebene keine Bedeutung

- **Geometrische Graphen** ordnen den **Knoten** jedoch eine geometrische **Position** zu:

  → im **n-dimensionalen Raum IR^n**

  → zu den **Kanten „glatte“ (kreuzungsfreie!) Kurven zwischen den Knoten,** die außer den Endknoten selbst keinen Punkt gemeinsam haben

- **Zweidimensionale** geometrische **Graphen**

  → müssen im zweidimensionalen Raum (2D) **kreuzungsfrei** sein

- Man kann beweisen, dass zu **jedem Graphen** ein **isomorpher dreidimensionaler geometrischer Graph** existiert

Graphentheorie

Eigenschaften: Geometrische Graphen

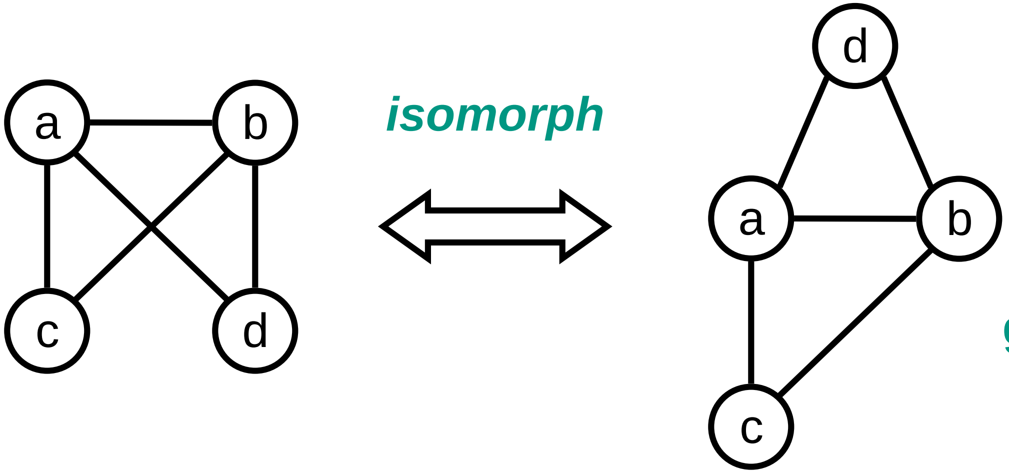
- In **zweidimensionaler Ebene:**
  → es existiert **nicht immer** in **2D** ein Graph

- Graphen, zu denen ein **isomorpher geometrischer** Graph in 2D existiert
  → nennt man **planare Graphen**

- **Planare Graphen** müssen **nicht immer kreuzungsfrei** dargestellt sein

Beispiel:

planarer Graph



2D geometrischer Graph

Graphentheorie

Definition: Duale Graphen

- **Planarer Graph**:
  → teilt die **Zeichenebene** in **verschiedene Gebiete** ein
  → **äußere Umgebung** des **Graphen** wird hier auch als **Gebiet** betrachtet

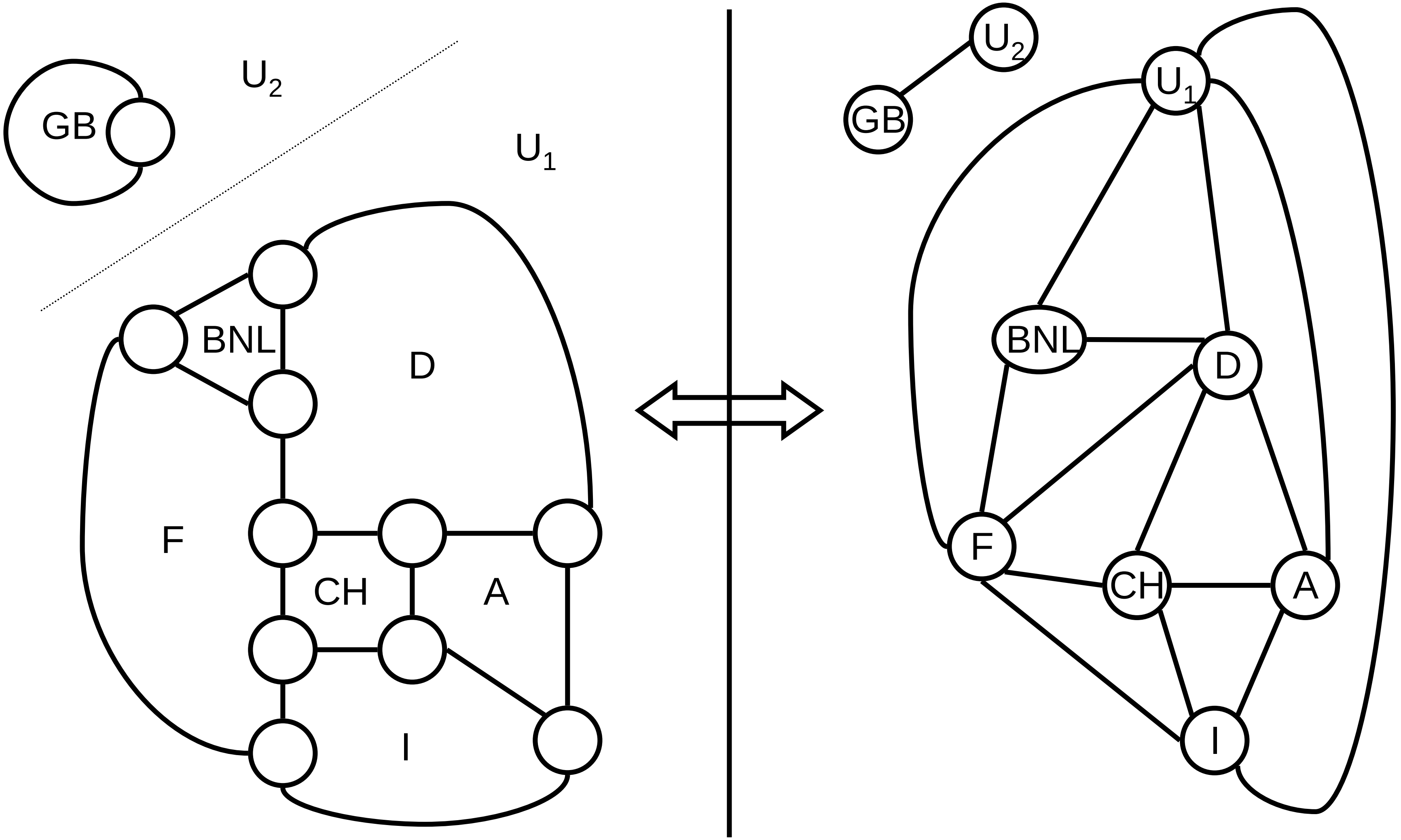
- **Planarität** des **Graphen**:
  → **notwendige** und **hinreichende** Bedingung dafür, dass man einen **dualen Graphen** dazu konstruieren kann

- Vorgehensweise: **Konstruktion eines dualen Graphen**
  → **Gebiete** eines zusammenhängenden **Graphen** in der Zeichenebene entsprechen den **Knoten** im **dualen Graphen**, **jede Grenze zwischen zwei Gebieten** (Kanten im Ausgangsgraph!) entspricht dabei **einer kreuzungsfreien Kante** im zu konstruierenden **dualen Graph**; jedem eigenständigen zusammenhängenden Graphen wird dabei ein eigener **Umgebungsknoten U** zugeordnet

- **Duale Graphen:**
  → spielen beispielsweise eine Rolle, bei der **Beurteilung**, ob eine **Schaltung planar** in einer 2D-Ebene **realisiert** werden kann

Duale Graphen

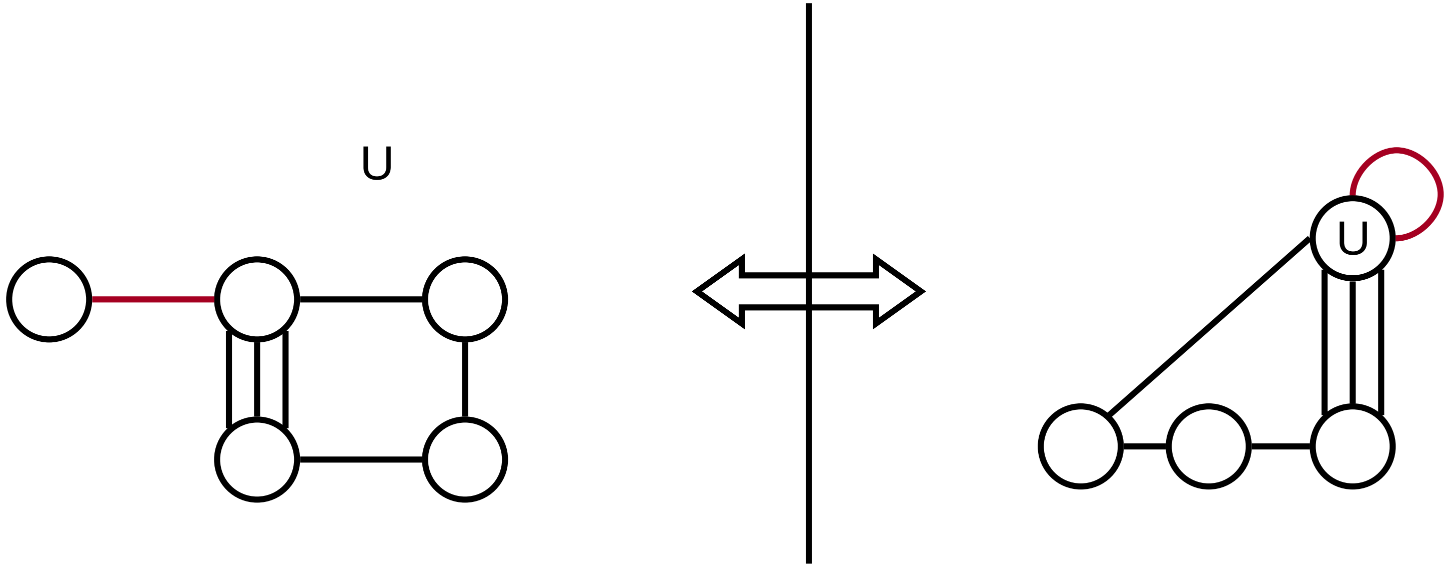
<u>Beispiel 1:</u> Duale Graphen



Duale Graphen

Beispiel 2: **Duale Graphen**

→ Konstruktion von Schlingen



Graphentheorie

Definition: Gewichtete Graphen

- Analog zum Scotland Yard Spiel:
  → es macht einen **Unterschied**, ob **zwei Knoten** mit einer **Bus-, Taxi-** oder **U-Bahn-Verbindung** verbunden sind

- Man kann jeder **Kante** noch **zusätzliche Attribute** zuordnen

- In vielen Fällen genügt jedoch die **Zuordnung** einer reellen Zahl, die als **Gewicht** bezeichnet wird
  → dann spricht man von einem **gewichteten Graphen**

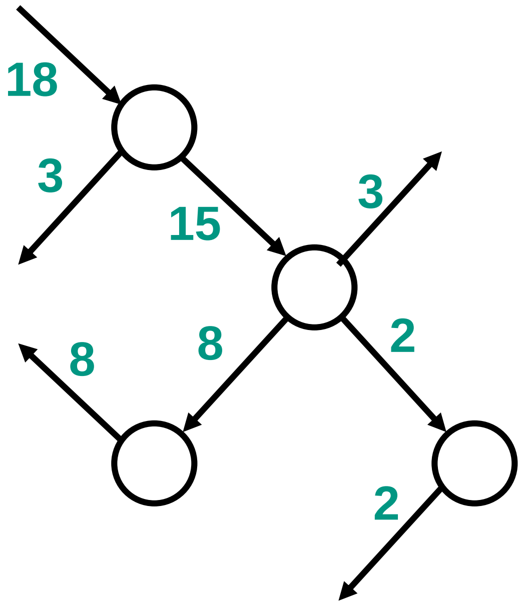
- **Gewichtete Graphen**:
  → dienen zur **Modellierung** von:
  - Netzwerkflüssen,
  - Transportprozessen, und
  - Planungsstrategien

Gewichtete Graphen

Beispiele: Gewichtete Graphen

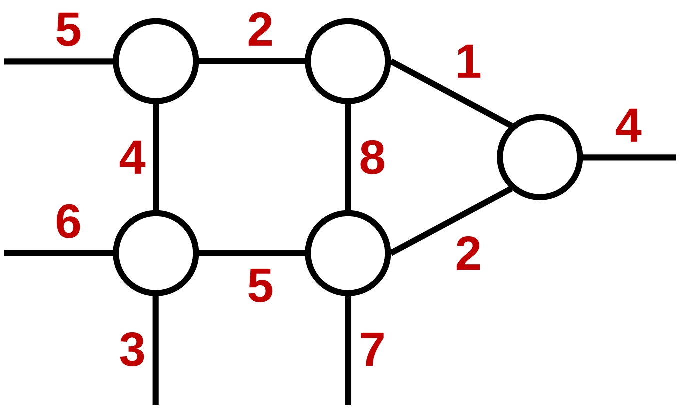
Netzwerkfluss

Gewicht: Durchsatz



Transportprozess

Gewicht: Entfernung



Gewichtete Graphen

Beispiel: **Planungsstrategie**

- **Produktionsabläufe** sind mit **gewichteten Graphen** modellierbar:
  → die **gerichteten Kanten** werden als **Arbeitsschritt** aufgefasst
  → als **Gewicht** wird die jeweils benötigte **Dauer** verwendet

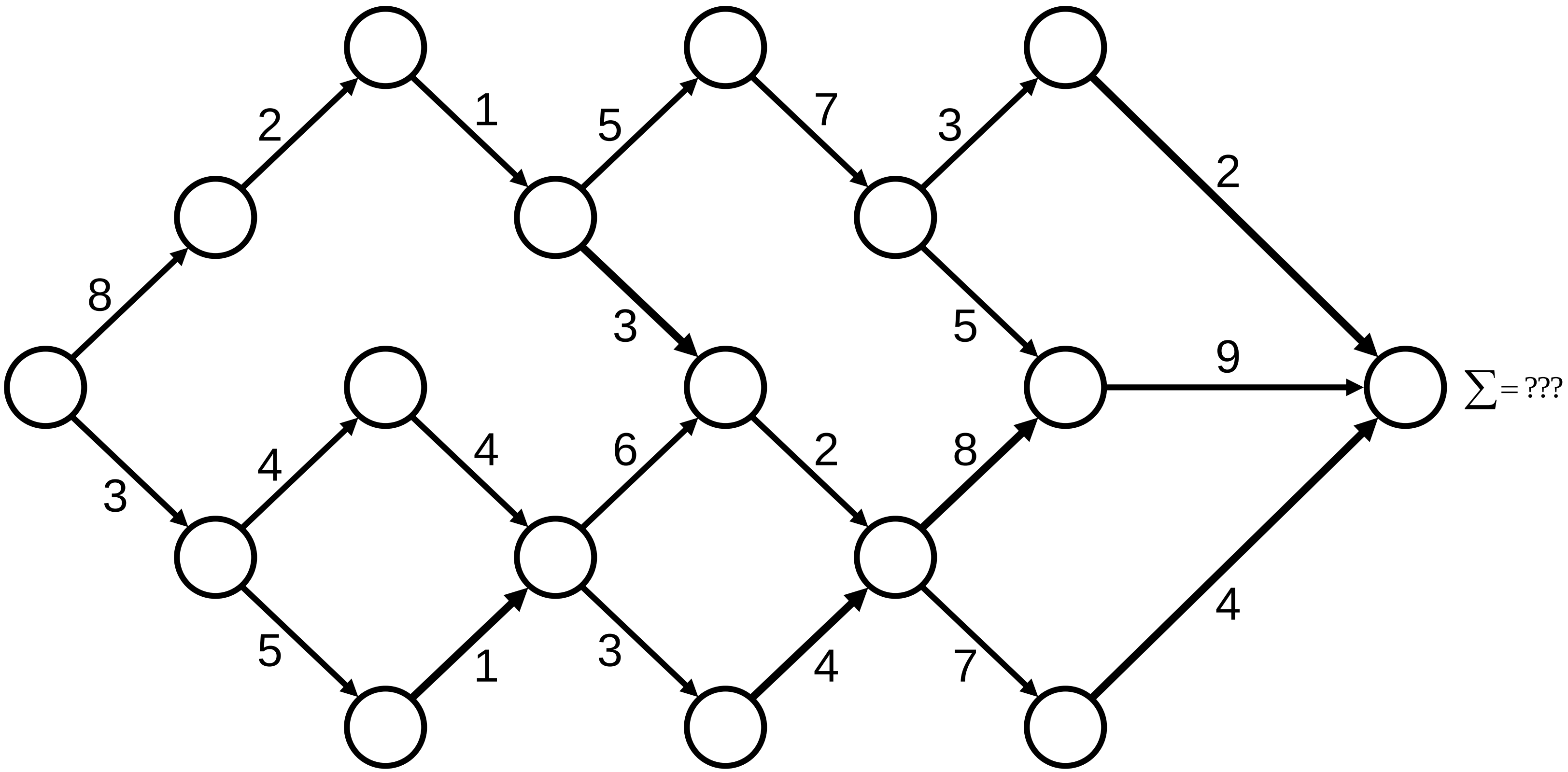
- mehrere ankommende **Kanten** an **einem Knoten markieren**
  → **Arbeitsschritte**, die **vorher abgearbeitet sein müssen**, bevor die Arbeitsschritte der abgehenden Kanten begonnen werden können

- **Also:** **Knoten** sind **Produktionszustände**
  → für deren Erreichen ist **minimale Arbeitsdauer** zu berechnen

- **Gesucht:** die **Dauer** des **kompletten Produktionsablaufs**

Gewichtete Graphen

Beispiel: Planungsstrategie



Gewichtete Graphen

Beispiel: **Planungsstrategie**

Vorgehensweise:

→ **Berechnung der Dauer des kompletten Produktionsablaufs**

- zur Lösung des Problems berechnet man jeweils das **Maximum** der **Gewichtssummen sämtlicher Wege** zu einem Knoten
- die **maximale Summe** steht für die **Gesamtzeit** des **Auftrags**
- **Optimalerweise:**

  → man wählt die **Knotenreihenfolge** bzw. **Kantenfolge** so, dass die **Gewichtsummen** der **Vorgängerknoten** schon berechnet sind
- Die **Wege** mit **maximalen Gewichtsummen** zum Endknoten ergeben einen (maximal) **aufspannenden Graphen**

Planungsstrategien

Beispiel: Planungsstrategie