

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

Minimierung digitaler Schaltfunktionen (Teil 1)

Minimierung (Optimierung)

- Aus den **schaltalgebraischen Ausdrücken** ist ersichtlich, dass der **Beschreibungsaufwand sinkt**, je **weniger Terme** vorhanden sind bzw. **je mehr Literale** aus den Termen **entfallen**
- Bei der **schaltungstechnischen Realisierung** zeigt sich ebenfalls, dass entsprechende Aufwendungen für Schaltelemente von der **Anzahl** der **Terme** und der verwendeten **Literale abhängen**
- Bei der **DNF** (KNF) benötigt man für **jede Einstelle** (Nullstelle) einen **Minterm** (Maxterm)
 - durch **gezieltes Weglassen** von **Literalen** in einem **Minterm** (Maxterm) kann dieser Term **mehrere Einstellen** (Nullstellen) **repräsentieren**
 - **Anzahl der benötigten Terme und Literale wird reduziert**
 - **Minimierung von Schaltfunktionen!**

Minimierung

Beispiele:	$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_4 \& \overline{x_3} \& \overline{x_2} \& x_1$	$E = \{(1,0,0,1)\}$	$ E = 1$
	$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_4 \& \overline{x_3} \& x_1$	$E = \{(1,0,0,1), (1,0,1,1)\}$	$ E = 2$
	$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \overline{x_3} \& x_1$	$E = \{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,0,1,1)\}$	$ E = 4$

Also: die **Reduzierung** von **Literalen** in einem **Term** hat auch die **Reduzierung** der **Anzahl** von **Termen** zur Folge

Gesucht: **Terme** mit **minimaler Anzahl** von **Literalen**, die trotzdem **nur Einstellen** (Nullstellen) der zu beschreibenden Funktion **erfassen**

→ diese Terme werden **Primterme** genannt

Minimierung

Primterme und Eins- bzw. Nullstellenüberdeckung

- **Einsstellen** (Nullstellen) **verschiedener Primterme können “überlappen”**
- (kosten)**günstigste Auswahl** von Primtermen gesucht, die **alle Einsstellen** (Nullstellen) der Funktion **überdecken** -> Überdeckungsproblem!
- das Gesamtproblem nennt man das **Minimierungsproblem**

Bewertungskriterium

- zur **Bewertung** unterschiedlicher **Lösungen** des **Minimierungsproblems** wird die **Anzahl der Literale** der Primterme zzgl. der **Zahl** der **verwendeten Terme** verwendet

Beispiel:

$$y = (x_4 \& \overline{x_3} \& x_2 \& \overline{x_1}) \vee (x_4 \& x_3 \& \overline{x_2}) \vee (x_5 \& x_3)$$

$$L(y) = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

Gesucht: **Auswahl** von **Primtermen** mit **L(y) minimal**

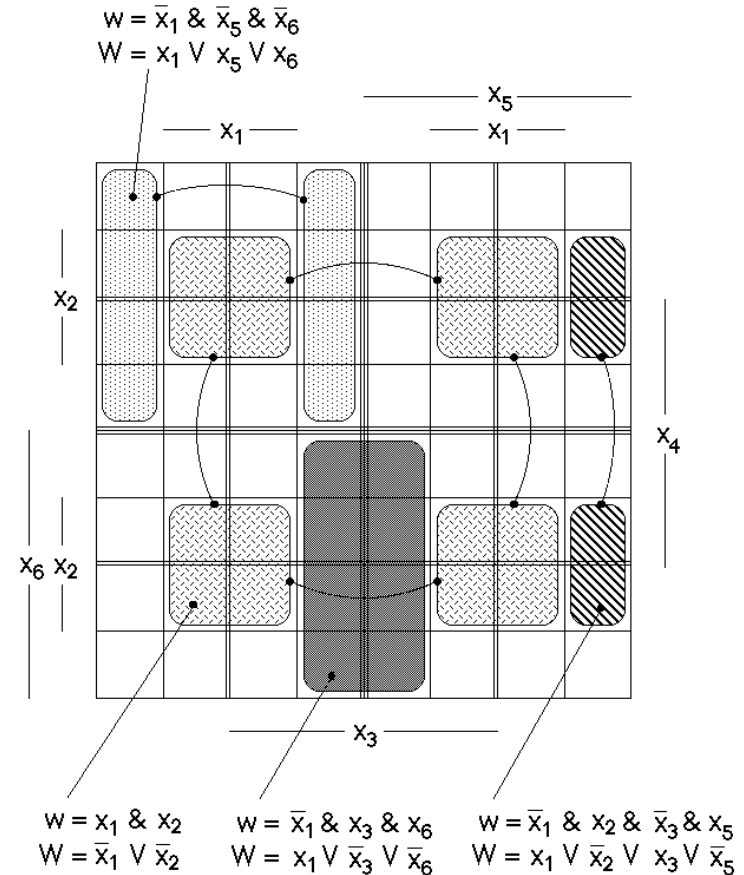
- Die **Minimierung** mit **Symmetriediagramm** stellt eine **graphische Methode** dar -> Ausnutzung der **Symmetrieverhältnisse**

-
- | | | | | | |
|-------|-------|---|---|---|-------|
| | X_1 | | | | |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | 0 | 0 | 1 | - | |
| | - | 1 | 0 | 0 | |
| | X_3 | | | | |
| X_2 | | | | | X_4 |

Minimierung am Symmetriediagramm

→ Finden von Primblöcken (Primtermen) in Symmetriediagrammen

- **Sukzessive Bildung** von **Blöcken** aus **Einsstellen** (Nullstellen) und **Freistellen**
→ durch **Spiegelung** von **kleineren Blöcken** (einzelne Einsstellen sind kleinste Blöcke) an allen möglichen **Symmetrielinien**
- **Maximal zusammengefasste Blöcke** von **Einsstellen** sind **Primeinsblöcke**, wenn keine Spiegelung mehr möglich



Minimierung am Symmetriediagramm

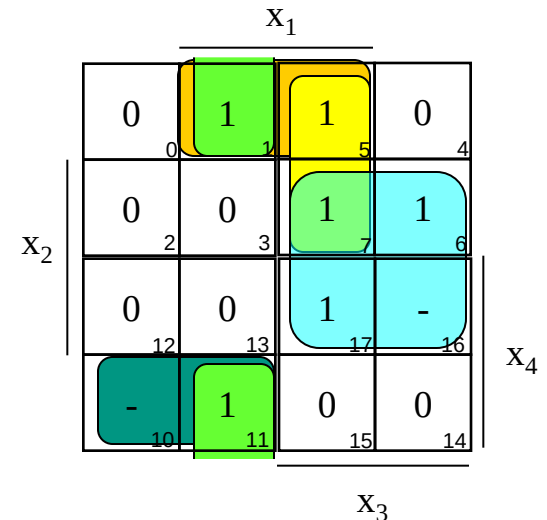
Beispiel (1):

■ Gegeben: $y = f(x_4, x_3, x_2, x_1)$ durch die Angabe der **Eins-** und **Nullstellen** im **Symmetriediagramm**

■ Gesucht: Kürzester algebraischer Ausdruck
→ **Disjunktive Minimalform (DMF)**

■ **Primterme** zur Bildung einer **DMF** spezifizieren **Primeinsblöcke**
→ werden **Primimplikanten** genannt
(*Primimplikate* für Konjunktive Minimalform KMF)

■ Die farbig dargestellten **Primimplikanten** überdecken **Eins-** und **Freistellen**



	x_1				
	0	1	2	3	
x_2	0	0	1	0	x_4
	1	0	1	1	
	2	0	1	-	
	3	-	1	0	
	4	5	6	7	
	8	9	10	11	
	12	13	14	15	
	x_3				

Minimierungsmethoden

Minimierung am Symmetriediagramm

Beispiel (2):

■ Als **Primimplikanten** erhält man:

$$w_1 = x_3 x_2$$

$$w_2 = \overline{x_4} \overline{x_2} x_1$$

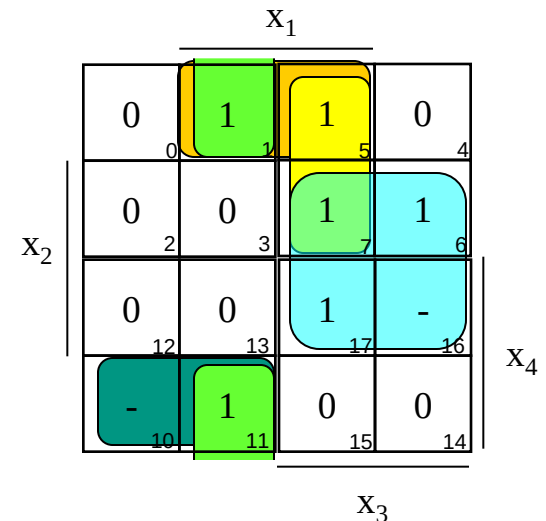
$$w_3 = \overline{x_4} x_3 x_1$$

$$w_4 = \overline{x_3} \overline{x_2} x_1$$

$$w_5 = \overline{x_4} x_3 x_2$$

Vorgehensweise:

- Auswahl der **Primimplikanten**, die **allein eine Einstelle** überdecken
- sogenannte **Kerne**
- sind durch die **Kerne alle Einstellen** überdeckt -> **Minimallösung**
- **sonst:** **Auswahl weiterer Primimplikanten**
(Strategie + Bewertung notwendig!)



Mögliche Lösung:

$$y = w_1 \vee w_2 \vee w_4$$