Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

# Digitaltechnik

# Funktionseinheiten der Digitaltechnik

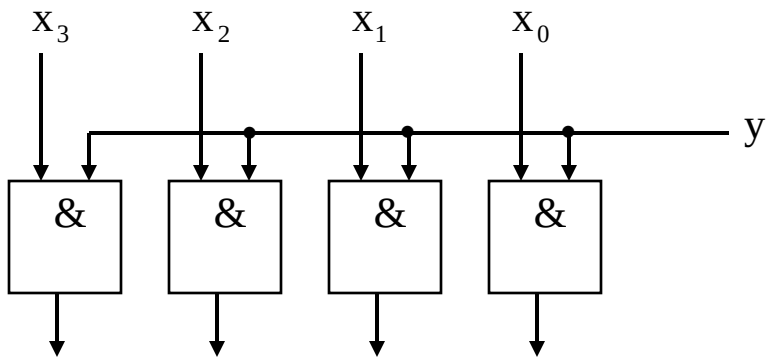
# Multiplizierer

## Arithmetische Grundlagen :

**Multiplikation** einer **Dualzahl** mit einer **einstelligen Dualzahl**:

$$11_{10} \cdot 1_{10} = 1011_2 \cdot 1_2 = 1011_2$$
$$11_{10} \cdot 0_{10} = 1011_2 \cdot 0_2 = 0000_2$$

- die **einstellige Multiplikation** durch eine **UND-Verknüpfung** realisieren



# Multiplizierer

## Arithmetische Grundlagen:

**Multiplikation** einer **Dualzahl** mit einer **2er-Potenz**:

$$\text{Dezimal}: 11_{10} \cdot 8_{10} = 88_{10}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dual}: \quad & 1011_2 \cdot 2^3 = 1011_2 \cdot 1000_2 \\
& = (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0) \\
& = (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 1\cdot 2^3 \\
& \quad + (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 0\cdot 2^2 \\
& \quad + (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 0\cdot 2^1 \\
& \quad + (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 0\cdot 2^0 \\
& = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 1011000_2 = 88_{10}
\end{aligned}$$

- die **Multiplikation** einer **Dualzahl** mit einer **2er-Potenz** $2^n$ bedeutet eine **Linksverschiebung** (*links-shift*) um **n-Stellen** und Nachziehen von n Nullen

# Multiplizierer

## Arithmetische Grundlagen:

**Beispiel** für eine **Multiplikation**:

$$
\begin{aligned}
&11_{10} \cdot 9_{10} = 1011_2 \cdot 1001_2 \\
&= (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot(1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0) \\
&= (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 1\cdot 2^0 \\
&\quad + (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 0\cdot 2^1 \\
&\quad + (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 0\cdot 2^2 \\
&\quad + (1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 1\cdot 2^3 \\
&= \quad 1011_2 \\
&\qquad + \quad 00000_2 \\
&\qquad + \quad 000000_2 \\
&\qquad + \quad 1011000_2 \\
&\qquad = \quad 01100011_2
\end{aligned}
$$

# Multiplizierer

## Implementierung:

der **Multiplikand** muss mit **jeder Stelle** des **Multiplikators multipliziert** werden, d.h. bitweise **konjunktiv verknüpft** werden

-> das **Ergebnis** also um die **entsprechende Stellenzahl** nach **links verschoben** und zu übrigen Ergebnissen **aufaddiert** werden

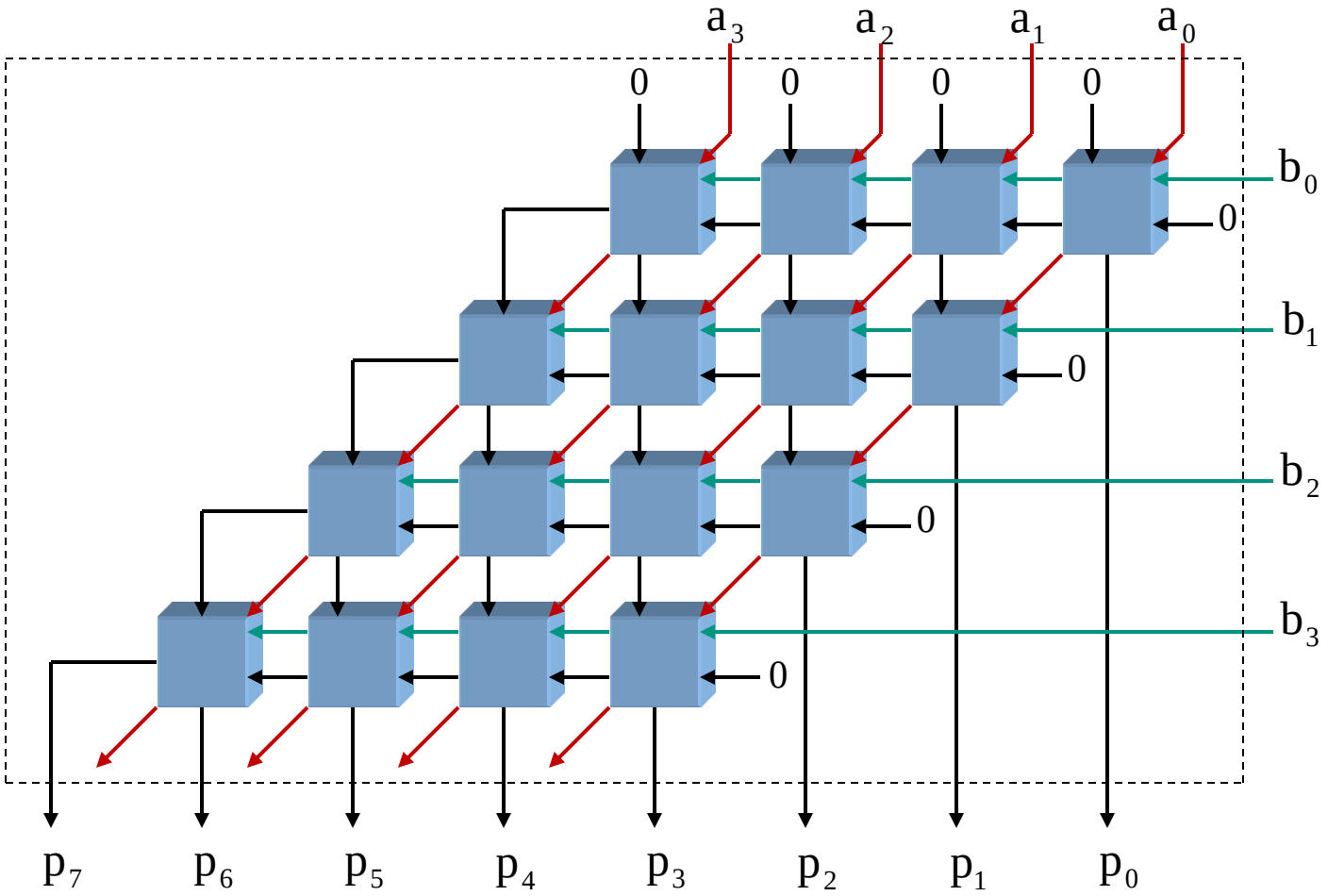
**Allgemein gilt:**

$$
\begin{array}{lll}
A_{n-1}...A_0 \cdot B_{k-1}...B_0 = & A_{n-1}...A_1A_0 & \cdot B_0 \cdot 2^0 \\
+ & A_{n-1}...A_1A_0 & \cdot B_1 \cdot 2^1 \\
 & ... & \\
+ & A_{n-1}...A_1A_0 & \cdot B_{k-1} \cdot 2^{k-1} \\
\hline
= P_{n+k} \; P_{n+k-1} \; ..... \; P_2 \; P_1 \; P_0 &&
\end{array}
$$

# Multiplizierer

## Implementierung:

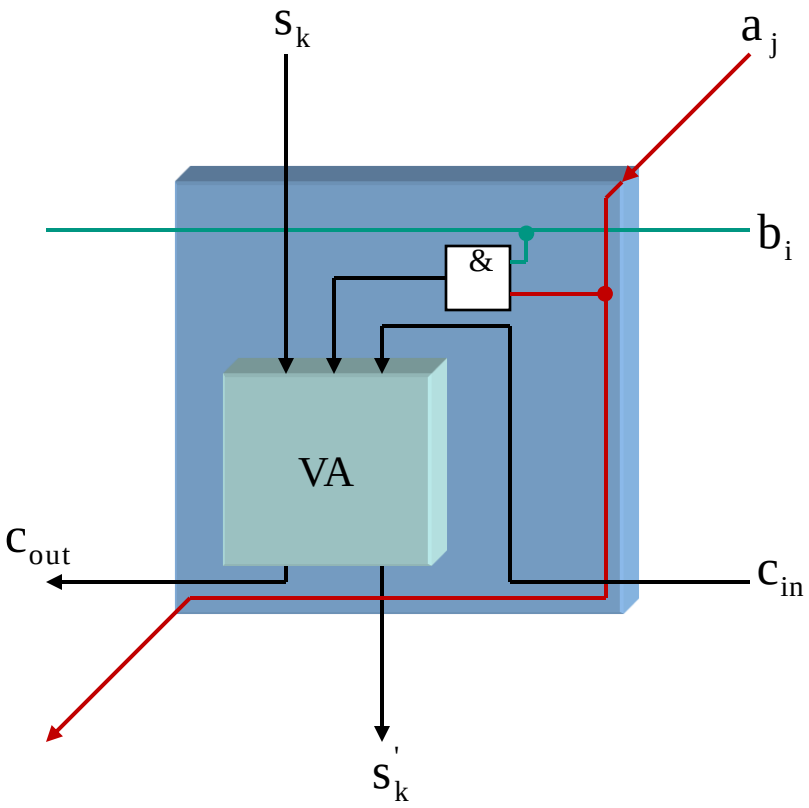
**Beispiel:** 4-Bit Multiplizierer



# Multiplizierer

## Implementierung:

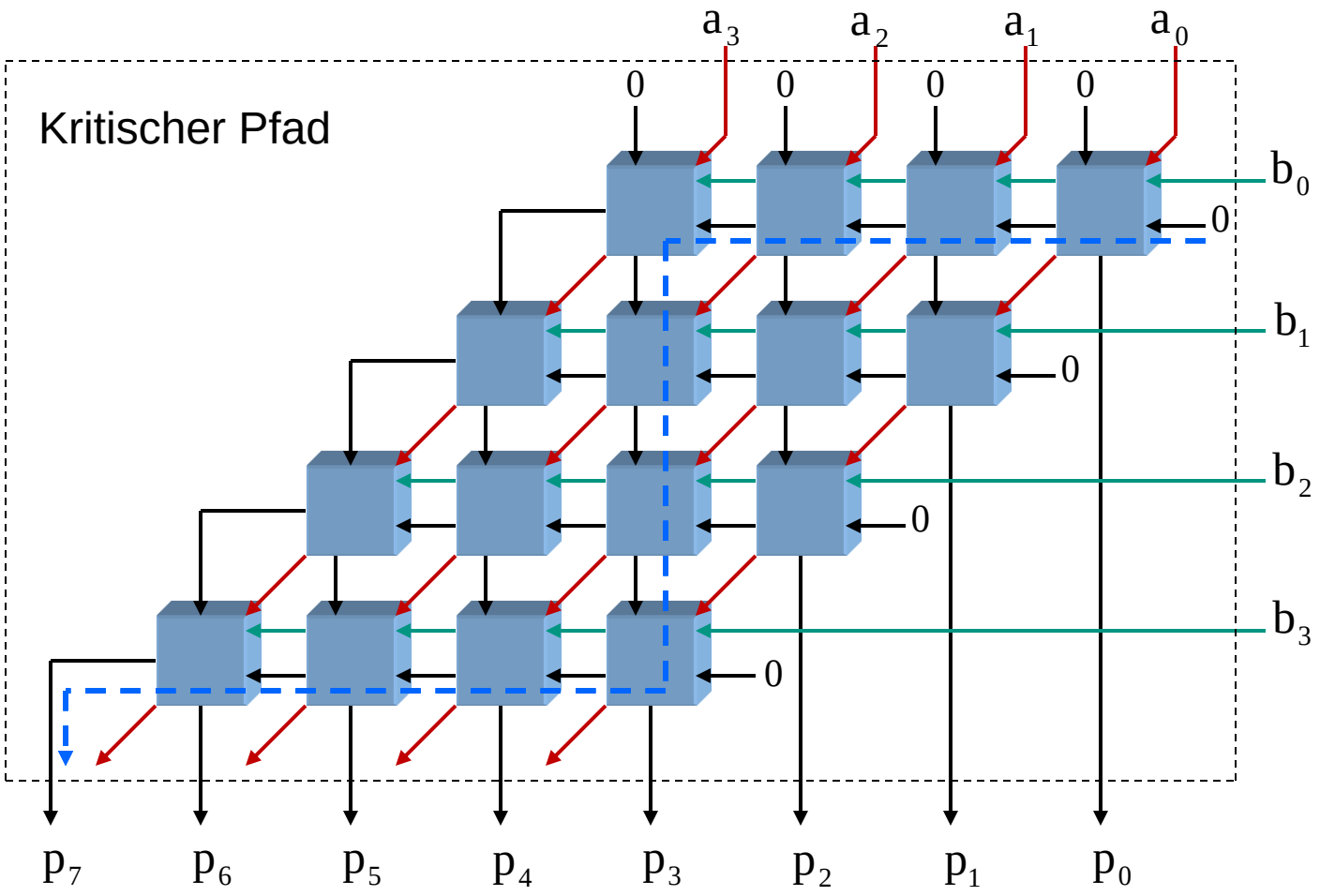
### Aufbau einzelner Zellen:



# Multiplizierer

## Implementierung:

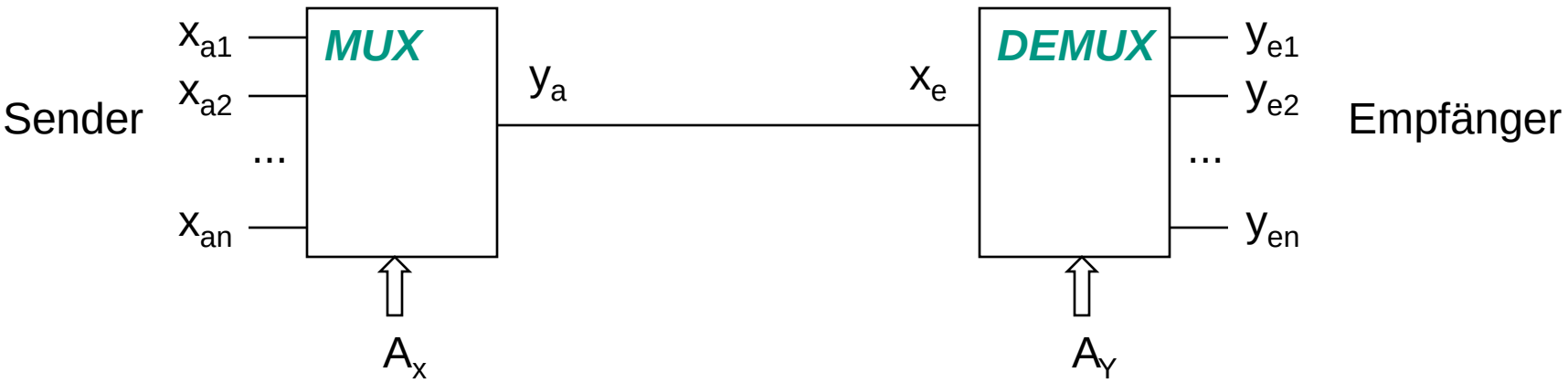
**Problem:** sehr lange Laufzeiten, im Beispiel 3n-2



# Spezielle Schaltnetze

## Multiplexer und Demultiplexer:

- **Verbindungen** zwischen **Systemgruppen** sind platz- und kostenintensiv
- Besonders bei großer räumlicher Distanz und großer Leitungsanzahl
- Falls die zeitlichen Anforderungen es erlauben, kann auf eine **serielle Übertragung** zurückgegriffen werden
- Die **Steuergrößen $A_x$** und **$A_y$ wählen** den **aktiven Eingang** oder **Ausgang**



# (De-)Multiplexer

**Beispiel:**

$$X_a = (x_{a4}, x_{a3}, x_{a2}, x_{a1})$$

$$Y_e = (y_{e4}, y_{e3}, y_{e2}, y_{e1})$$

$$r = \lceil ld\, 4 \rceil = 2$$

$$A_x = (a_{x2}, a_{x1})$$

$$A_y = (a_{y2}, a_{y1})$$

**2 Steuerleitungen** nötig

## 4:1 Multiplexer

| $a_{x2}$ | $a_{x1}$ | $y_a$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $x_{a1}$ |
| 0 | 1 | $x_{a2}$ |
| 1 | 0 | $x_{a3}$ |
| 1 | 1 | $x_{a4}$ |

## 1:4 Demultiplexer

| $a_{y2}$ | $a_{y1}$ | $y_{e1}$ | $y_{e2}$ | $y_{e3}$ | $y_{e4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $x_e$ | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | $x_e$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $x_e$ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $x_e$ |

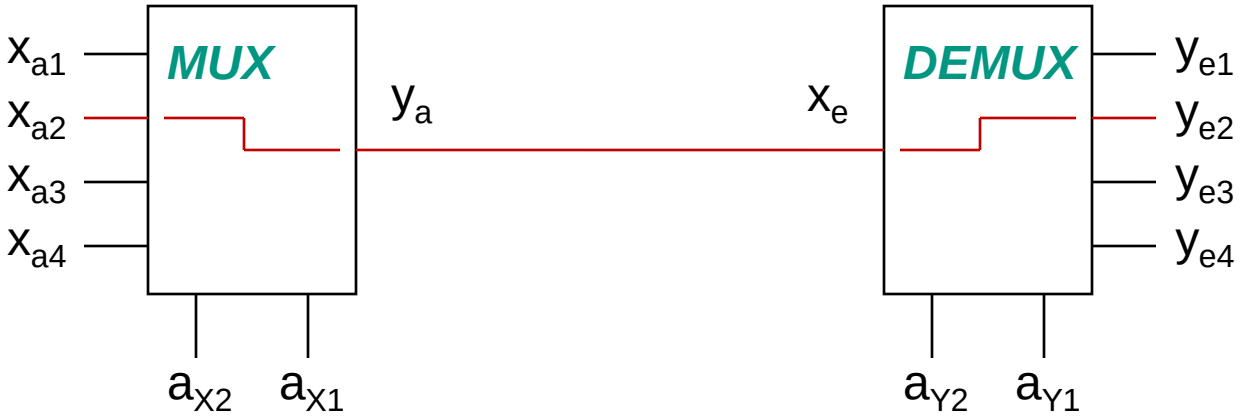
# (De-)Multiplexer

**Beispiel:** **4:1 Multiplexer**

| $a_{x2}$ | $a_{x1}$ | $y_a$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $x_{a1}$ |
| 0 | 1 | $x_{a2}$ |
| 1 | 0 | $x_{a3}$ |
| 1 | 1 | $x_{a4}$ |

**1:4 Demultiplexer**

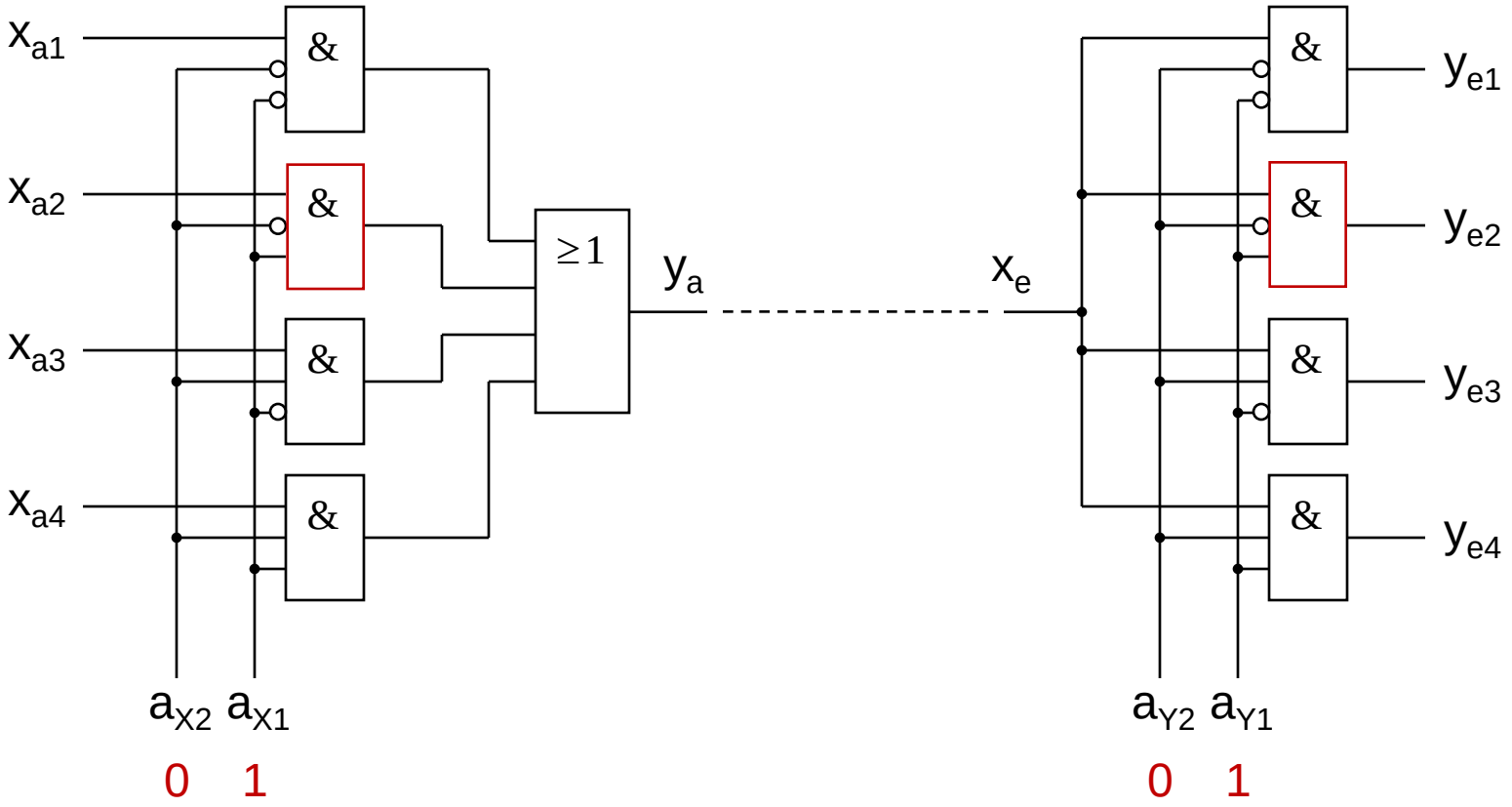
| $a_{y2}$ | $a_{y1}$ | $y_{e1}$ | $y_{e2}$ | $y_{e3}$ | $y_{e4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $x_e$ | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | $x_e$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $x_e$ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $x_e$ |



# (De-)Multiplexer

## Typische Schaltnetze für Multiplexer und Demultiplexer:

- Die ***Minterme*** der **Adressvektoren $A_x$** und **$A_y$** geben immer **genau ein *UND*-Gatter „frei“**



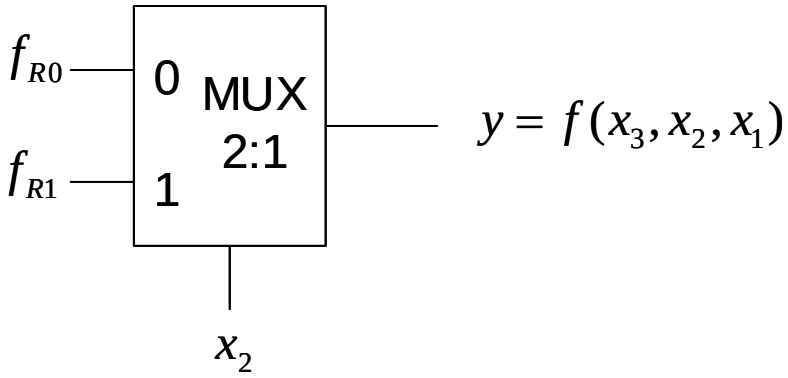
# Multiplexer

## Anwendung:

- mit **Multiplexern** kann man noch **viele andere Aufgaben** lösen
  - -> z.B. ***Strukturausdrücke*** nach dem **Entwicklungssatz** sind **direkt umsetzbar**
  - -> **Auswahl** zwischen **zwei Werten** eines **Literals** übernimmt **2:1 Multiplexer**

## Beispiel:

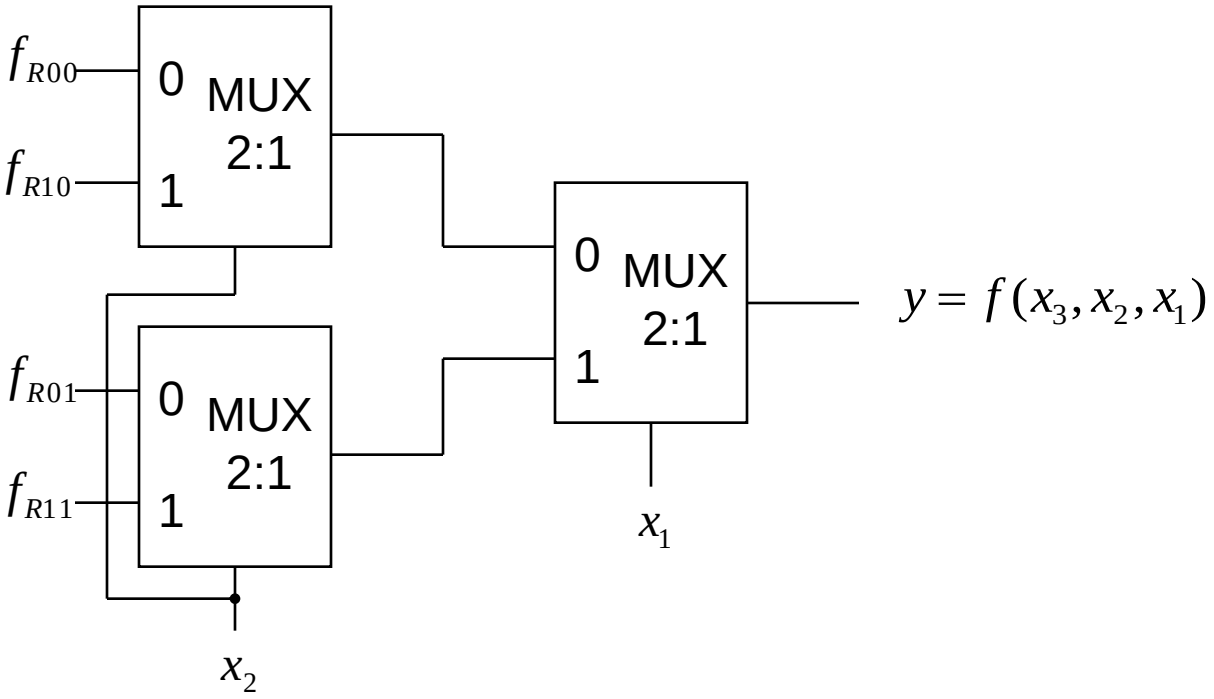
$$y = f(x_3, x_2, x_1)$$
$$= (\overline{x_2} \,\&\, f(x_3, 0, x_1)) \vee (x_2 \,\&\, f(x_3, 1, x_1))$$
$$= (\overline{x_2} \,\&\, f_{R0}) \vee (x_2 \,\&\, f_{R1})$$



# Multiplexer

## Entwicklung nach zwei Variablen:

-> **Realisierung** mit **2:1 Multiplexern**



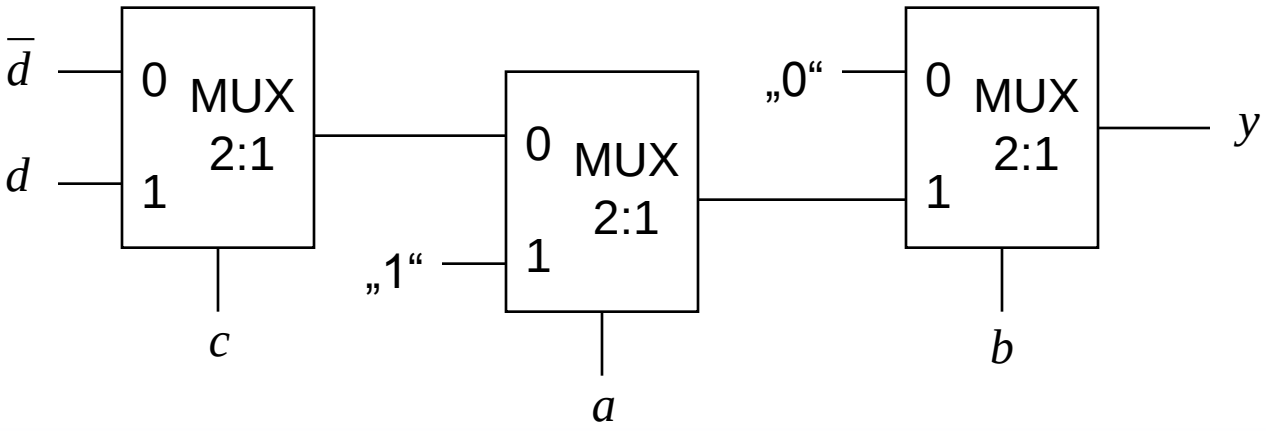
# Multiplexer

Bei der **Realisierung** einer **Funktion** mit **n Literalen** über

**Multiplexer** muss **nach n-1 Variablen entwickelt** werden

**Beispiel:**

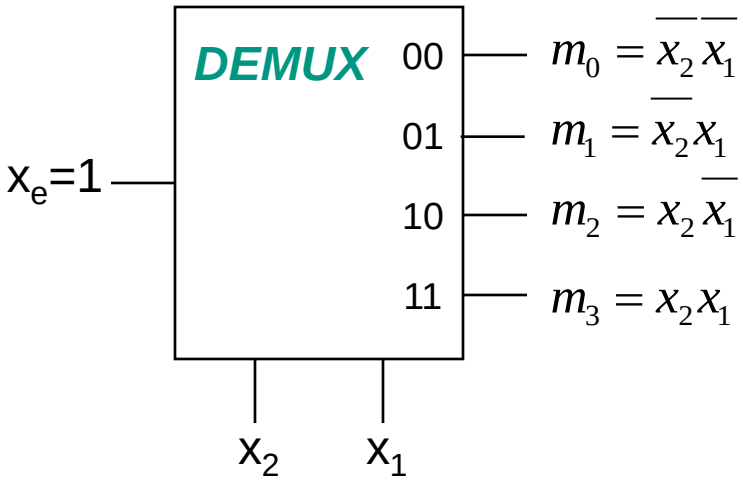
$$
\begin{aligned}
y &= b \,\&\, a \vee (b \,\&\, (c \equiv d)) \\
&= b \,\&\, [a \vee (c \equiv d))] \vee \bar{b} \,\&\, 0 \\
&= b \,\&\, [a \,\&\, 1 \vee \bar{a} \,\&\, (c \equiv d))] \vee \bar{b} \,\&\, 0 \\
&= b \,\&\, [a \,\&\, 1 \vee \bar{a} \,\&\, (c \,\&\, d \vee \bar{c} \,\&\, \bar{d})] \vee \bar{b} \,\&\, 0
\end{aligned}
$$



# Demultiplexer

## Anwendung:

- **Demultiplexer** können zur **Ansteuerung** von **Steuerleitungen** von **Speicherzellen** verwendet werden
- An diesem Beispiel wird auch die Bezeichnung ***Adressvektor*** für die Steuerleitungen klar
- Liegt der **Wert "1"** an dem Eingang des **Demultiplexers**, so repräsentieren die **Ausgänge** sämtliche **Minterme** des ***Adressvektors***

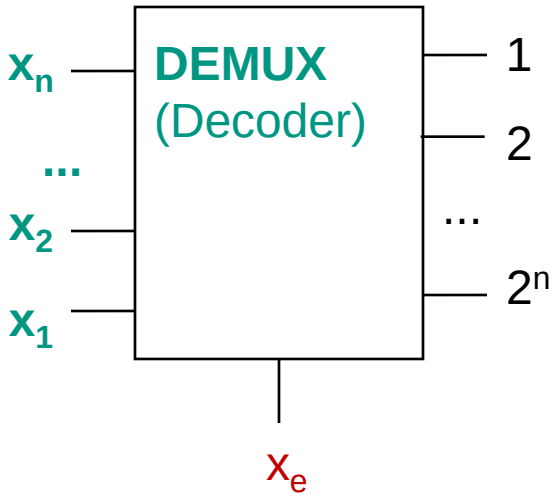


# Demultiplexer

## Anwendung:

- In der Anwendung als **Decoder** einer Adresse wird der **Demultiplexer** auch gerne als Codewandler so gezeichnet:

**Adressleitungen**




**Enable-Variable**

# Spezielle Schaltwerke

**Anwendungsfälle:**

Auch bei **Schaltwerken** gibt es einige Beispiele, die in **unterschiedlichsten Anwendungsfällen** eingesetzt werden

- Anzahl von Ereignissen oder Aktionen festzuhalten
- Informationen zeitlich oder räumlich zu ordnen oder umzusetzen
- Spalten- bzw. Zeilenselektion in einem Speicher
- Tastaturmatrix

# Spezielle Schaltwerke

## Zähler

- **Zähler-Schaltwerke** dienen dazu auf einer speziellen Signalleitung beobachtete **Ereignisse** zu **zählen**
- Das Zählen entspricht einer **Abbildung** in den **Zustandsraum**, sodass ein **Zählcode** entsteht
- Wie bei Mechanischen Zählern können noch **weitere Eingriffmöglichkeiten** eingebaut werden:
  - Überlaufmeldung
  - Nullstellungsmeldung
  - Rückstellmöglichkeit auf 0

# Dualzähler

**Beispiel:**

- Es soll ein Zähler als Schaltwerk realisiert werden, der...
  - **dual zyklisch** von 0 bis 7 zählt
  - eine **Rückstellmöglichkeit** auf 0 besitzt
  - bei dem Wert 7 das **Überlaufsignal** auf 1 setzt
  - auf den **Wechsel** der **Zählervariable Z** von **0 auf 1** reagiert

- Zur **Realisierung** sollen **JK-Flipflops** mit **0/1-Flankensteuerung** verwendet werden

# Dualzähler

**Beispiel:**

- **Eingangsvariable**:

  N = 1: Rückstellen auf 0
  N = 0: sonst

- **Ausgangsvariable**:

  Ü = 1: Zählerstand ist 7
  Ü = 0: sonst

- Bei Zählern wird die **Zählervariable Z** häufig nicht als Eingangsvariable sondern direkt **als Taktsignal** angeschlossen

- Das **Zählereignis** „Wechsel von 0 auf 1“ kann so direkt mit einem **synchronen Schaltwerk** mit **positiver Flankensteuerung** realisiert werden

# Dualzähler

## Schaltwerkstabelle:

- Die **Kodierung** der **Zustände** ist die **duale Zahlendarstellung**
- Bei **N = 1** ist der **Folgezustand** auf jeden Fall **0** (Rücksetzen)
- Die **Übertragungsfunktion** kann direkt abgelesen werden:

$$\ddot{U} = q_3^{\nu} \,\&\, q_2^{\nu} \,\&\, q_1^{\nu}$$

| $Q^{\upsilon}$ | | | $X^{\upsilon}$ | $Q^{\upsilon+1}$ | | | $Y^{\upsilon}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_3$ | $q_2$ | $q_1$ | N | $q_3$ | $q_2$ | $q_1$ | Ü |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Dualzähler

## Ansteuerfunktionen:

- durch **Ablesen**

  oder

  mit Hilfe von

  ***Symmetrie-diagrammen***

  erhält man:

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = N \vee q_1^{\nu}$$

$$K_3 = N \vee q_2^{\nu} q_1^{\nu}$$

$$J_1 = \overline{N}$$

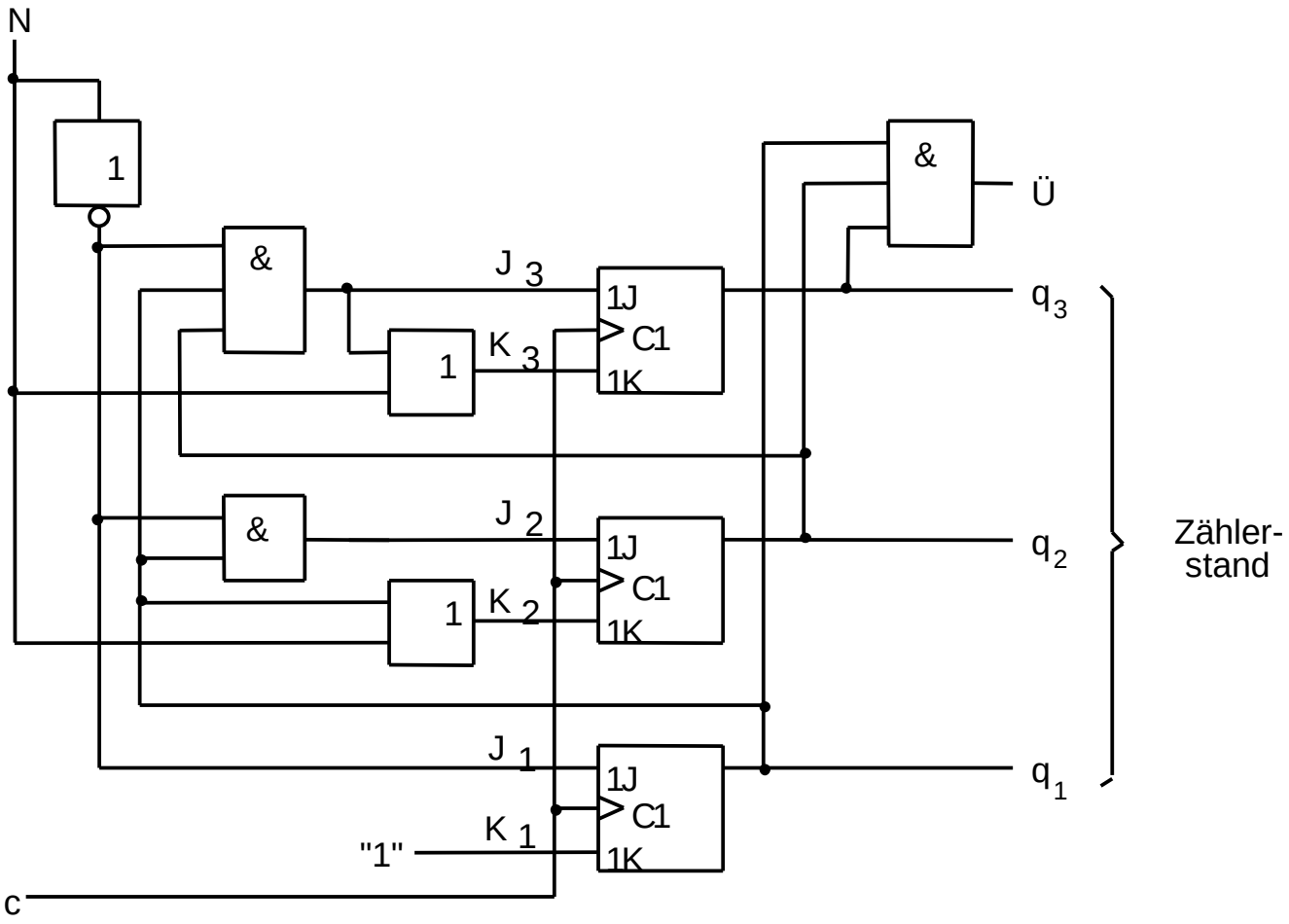
$$J_2 = \overline{N} q_1^{\nu}$$

$$J_3 = \overline{N} q_2^{\nu} q_1^{\nu}$$

| $Q^{\upsilon}$ | | | $X^{\upsilon}$ | $Q^{\upsilon+1}$ | | | $Y^{\upsilon}$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_3$ | $q_2$ | $q_1$ | N | $q_3$ | $q_2$ | $q_1$ | Ü | $J_3$ | $K_3$ | $J_2$ | $K_2$ | $J_1$ | $K_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | - | 0 | - | 1 | - |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | - | 0 | - |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | - | 1 | - | - | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | - | - | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | - | - | 0 | 1 | - |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | 1 | 0 | - |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | - | - | 1 | - | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | 1 | - | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | - | 0 | 0 | - | 1 | - |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 1 | 0 | - | 0 | - |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | - | 0 | 1 | - | - | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 1 | 0 | - | - | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | - | 0 | - | 0 | 1 | - |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 1 | - | 1 | 0 | - |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | - | 1 | - | 1 | - | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | - | 1 | - | 1 | - | 1 |

# Dualzähler

## Blockschema des Zählers:




**Ansteuerfunktionen:**

$$J_1 = \overline{N}$$

$$J_2 = \overline{N} q_1^{\nu}$$

$$J_3 = \overline{N} q_2^{\nu} q_1^{\nu}$$

$$K_1 = 1$$

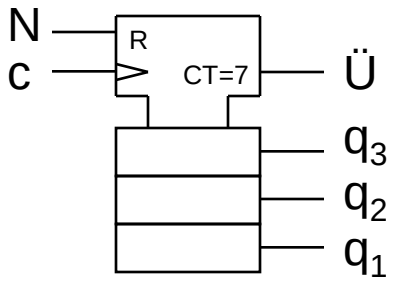
$$K_2 = N \vee q_1^{\nu}$$

$$K_3 = N \vee q_2^{\nu} q_1^{\nu}$$

# Dualzähler

## Symboldarstellung:

- Um bei Zählern von **Realisierungsdetails** zu **abstrahieren** führt man **Blocksymbole** ein
- Das **Symbol** besteht aus einem **Daten-** und einem **Steuerteil**
- Für das besprochene Beispiel sieht der **Zähler** so aus:



# Dualzähler

## Eigenschaften:

- Hier noch die **wichtigsten Merkmale** von **Zählern**:
  - **Art des Zählcodes**
    -> Dualzahlen, 1-aus-n-Code, BCD-Code,...
  - **Art des Zählereignisses**
    -> 0->1, 1->0, Auftreten von Werten, ...
  - **Steuersignal** für **Zählen/Anhalten**
  - **Steuersignal** für **Zählrichtung** (aufwärts/abwärts)
  - **Synchrone** oder **asynchrone Rückstellmöglichkeit**
  - **Steuersignal** für Zählen/Laden eines **Anfangswertes**

# Spezielle Schaltwerke

## Register:

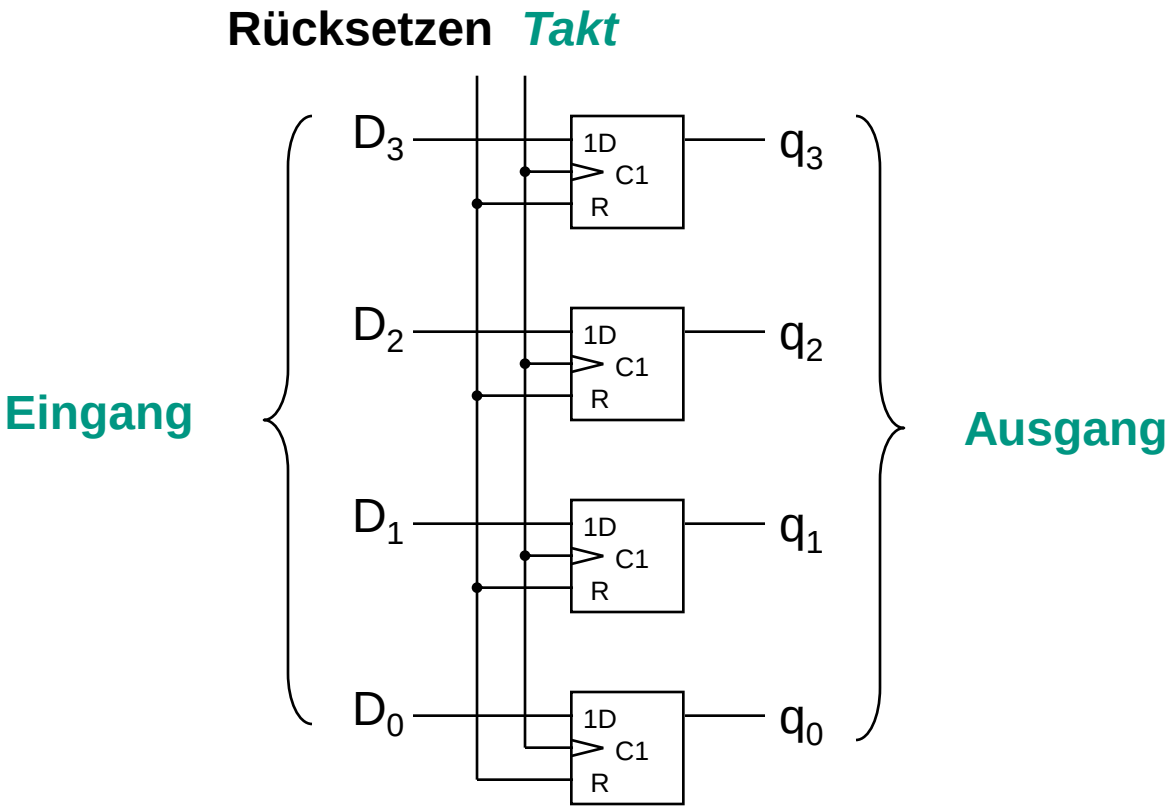
- Zur Darstellung von Informationen genügen nur selten einzelne Bits
- Daher ist es zweckmäßig **mehrere FlipFlops zu einem *Verbund*** zusammenzuschließen

  -> Sie können so mit **gemeinsamem Takt** und Rücksetzmöglichkeiten versorgt werden
- So ein **FlipFlop-Verbund** wird auch **Register** genannt

# Register

## Beispiel:

- **Register**, das ein **4-bit Datenwort** bei ansteigender Taktflanke speichert und sich asynchron auf 0 rücksetzen lässt:



# Register

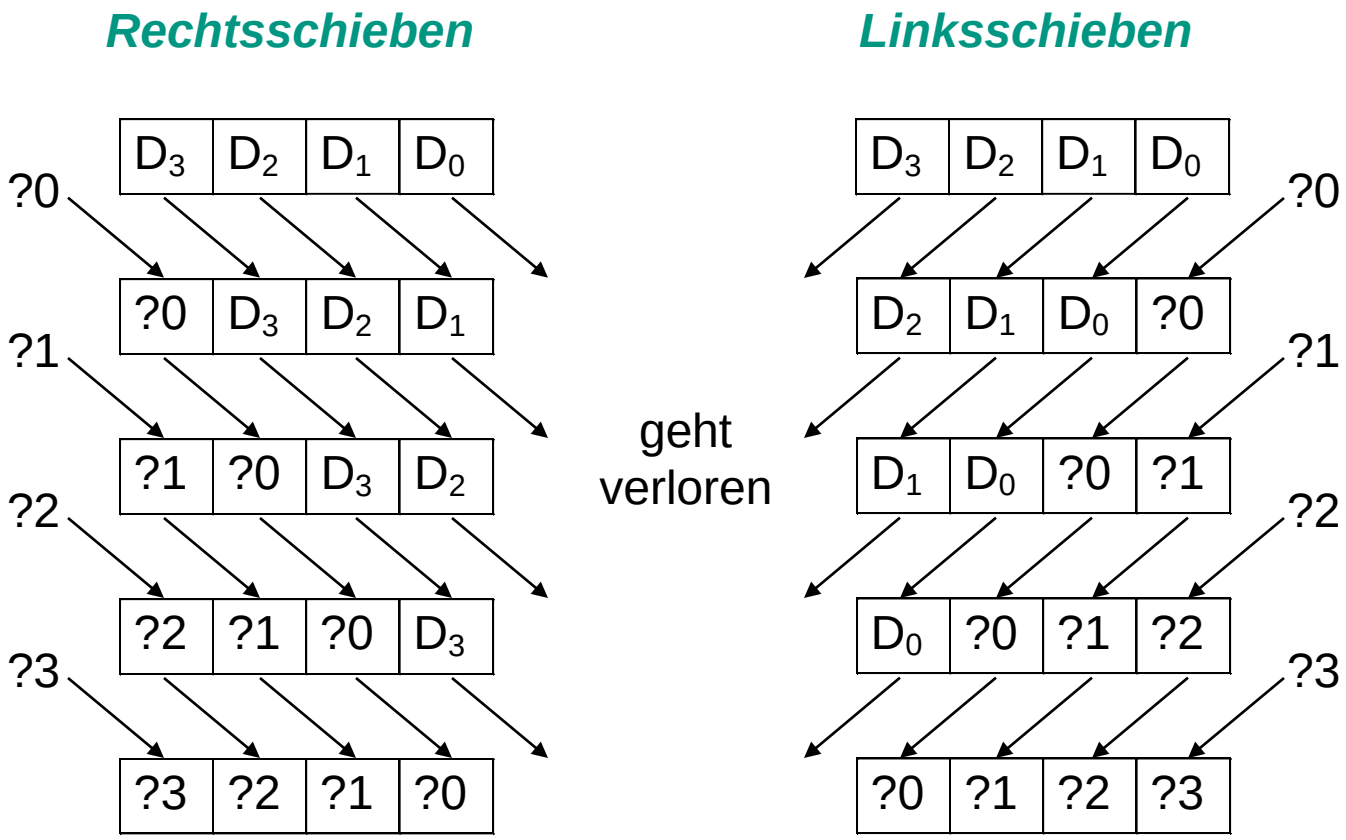
## Spezialregister:

- **Datentechnisch** sind die **Speicherzellen** eines **Registers** im allgemeinen **nicht miteinander verbunden**
- **Register** werden jedoch oft mit **Funktionen** ausgestattet, die auf **mehreren Speicherzellen operieren**
- Besonders **Funktionen**, bei denen sich nur **benachbarte Speicherzellen** beeinflussen, lassen sich **effizient** im **Register realisieren**
- Ein einfach zu realisierendes Spezialregister ist das **Schieberegister**
- Beim **Schieberegister** können **alle Speicherinhalte** um **eine Zelle weitergeschoben** werden
- Die **Auslösung** dieses Vorgangs erfolgt **durch ein Taktsignal**

# Spezialregister

## Beispiel:

- **4-Bit Schieberegister:**

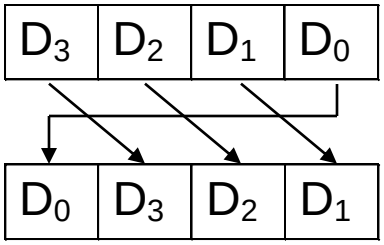


# Spezialregister

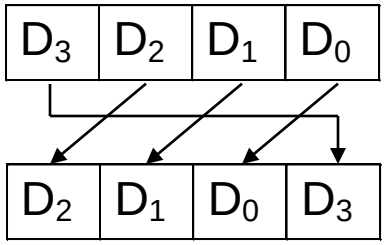
## Schieberegister:

- Beim **Schieben geht** jeweils das in **Schieberichtung** voranstehende **Datenbit verloren**
- Das **letzte Datenbit** wird mit einem **Inhalt gefüllt**, der von den **Randbedingungen** dieser Zelle abhängt
- Damit die **Daten nicht verloren gehen**, kann man **zirkulär rotieren** und den Inhalt des „rausgeschobenen“ Bits auf der anderen Seite einspeisen

***Rechtsschieben***



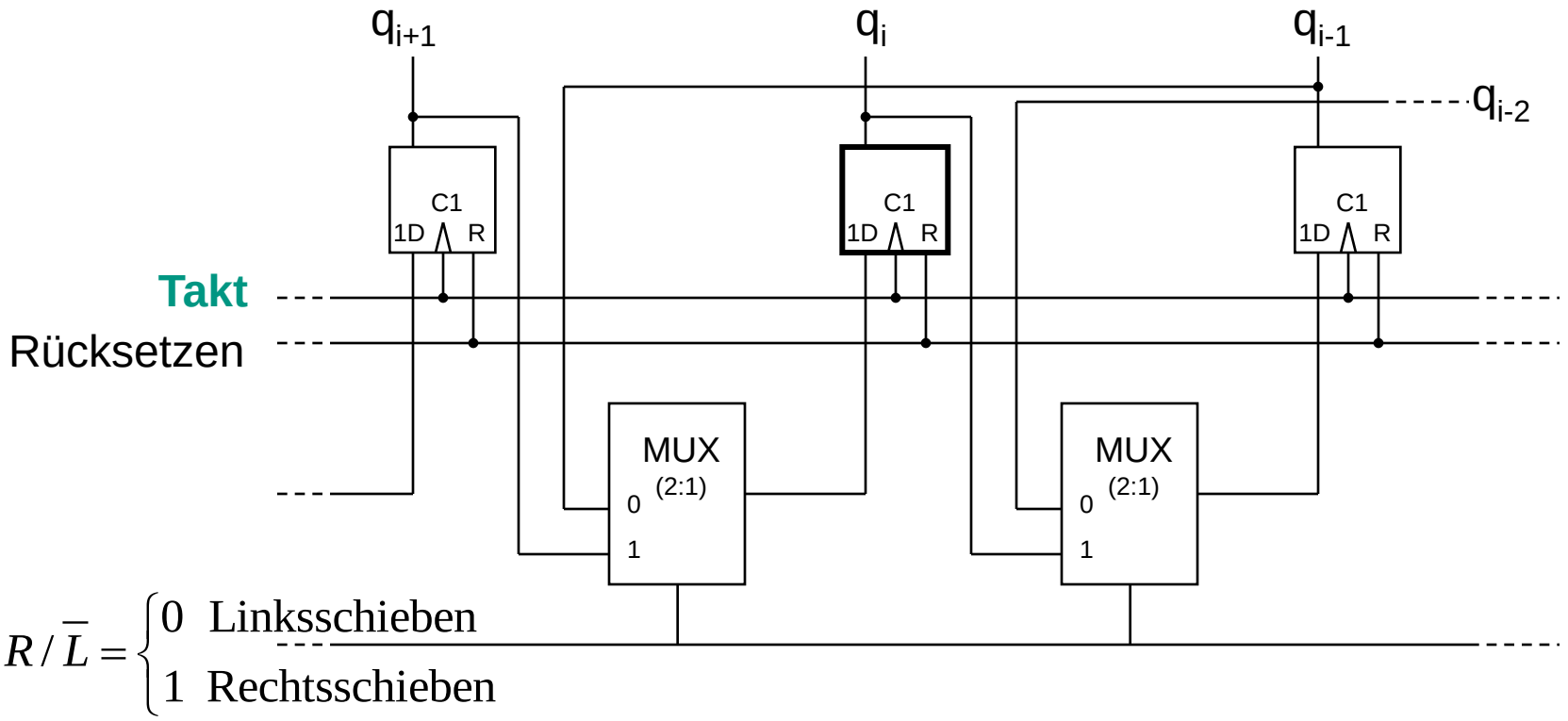

***Linksschieben***



# Schieberegister

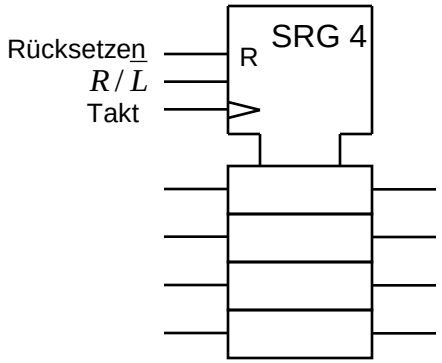
## Technische Realisierung:

- Auch hier gibt es eine **große Zahl** von **Realisierungsmöglichkeiten**
- **Beispielrealisierung** eines **Schieberegisters** mit Links-/Rechtsschieben, asynchronem Rücksetzen und D-Flipflops



# Schieberegister

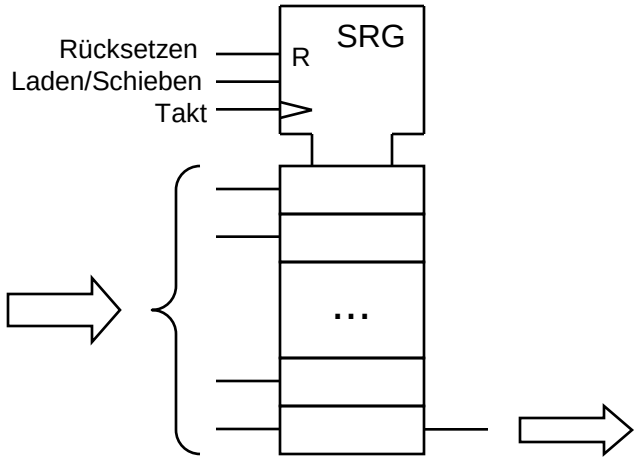
## Blockschaltbild:




## Anwendung:

- **Schieberegister** werden auch verwendet, um **Datenbitgruppen** von **räumlichen Folgen** in eine **zeitliche Folge umzuwandeln**
- Dies wird **Parallel/Serienwandlung** bzw. **Serien/Parallelwandlung** genannt

# Schieberegister
## Parallel/Serienwandlung:

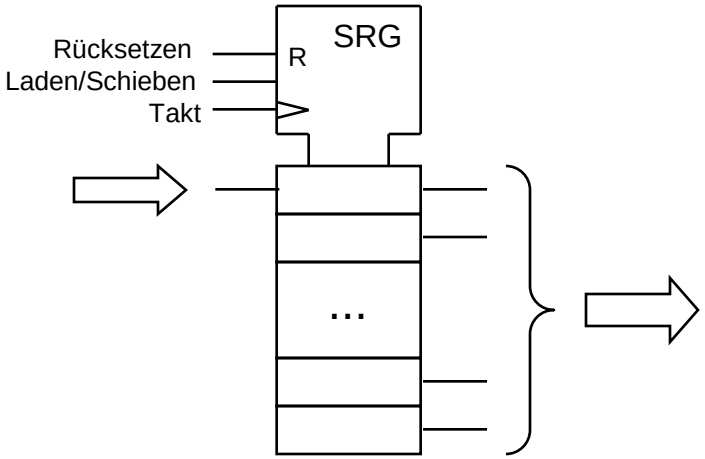



- Bei der **Parallel/Serienwandlung** werden z.B. die **Daten ($D_n$,... ,$D_1$, $D_0$) parallel** in das **Register** geladen

- Danach können sie **seriell** in der **zeitlichen Reihenfolge ausgegeben** werden

# Schieberegister

## Serien/Parallelwandlung:




- Bei der **Serien/Parallelwandlung** werden die **Daten in zeitlicher Folge** in das **Register** geschoben
- Danach können sie “**gebündelt ausgelesen**“ werden