

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

Minimierung digitaler Schaltfunktionen (Teil 1)

Minimierung (Optimierung)

- Aus den **schaltalgebraischen Ausdrücken** ist ersichtlich, dass der **Beschreibungsaufwand sinkt**, je **weniger Terme** vorhanden sind bzw. **je mehr Literale** aus den Termen **entfallen**
- Bei der **schaltungstechnischen Realisierung** zeigt sich ebenfalls, dass entsprechende Aufwendungen für Schaltelemente von der **Anzahl** der **Terme** und der verwendeten **Literale abhängen**
- Bei der **DNF** (KNF) benötigt man für **jede Einstelle** (Nullstelle) einen **Minterm** (Maxterm)
 - durch **gezieltes Weglassen** von **Literalen** in einem **Minterm** (Maxterm) kann dieser Term **mehrere Einstellen** (Nullstellen) **repräsentieren**
 - **Anzahl der benötigten Terme und Literale wird reduziert**
 - **Minimierung von Schaltfunktionen!**

Minimierung

Beispiele:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_4 \& \overline{x_3} \& \overline{x_2} \& x_1 \quad E = \{(1,0,0,1)\} \quad |E| = 1$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_4 \& \overline{x_3} \& x_1 \quad E = \{(1,0,0,1), (1,0,1,1)\} \quad |E| = 2$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \overline{x_3} \& x_1 \quad E = \{(0,0,0,1), (0,0,1,1), (1,0,0,1), (1,0,1,1)\} \quad |E| = 4$$

Also: die **Reduzierung** von **Literalen** in einem **Term** hat auch die **Reduzierung** der **Anzahl** von **Termen** zur Folge

Gesucht: **Terme** mit **minimaler Anzahl** von **Literalen**, die trotzdem **nur Einstellen** (Nullstellen) der zu beschreibenden Funktion **erfassen**

→ diese Terme werden **Primterme** genannt

Minimierung

Primterme und Eins- bzw. Nullstellenüberdeckung

- **Einsstellen** (Nullstellen) **verschiedener Primterme können “überlappen”**
- (kosten)**günstigste Auswahl** von Primtermen gesucht, die **alle Einsstellen** (Nullstellen) der Funktion **überdecken** -> Überdeckungsproblem!
- das Gesamtproblem nennt man das **Minimierungsproblem**

Bewertungskriterium

- zur **Bewertung** unterschiedlicher **Lösungen** des **Minimierungsproblems** wird die **Anzahl der Literale** der Primterme zzgl. der **Zahl** der **verwendeten Terme** verwendet

Beispiel:

$$y = (x_4 \& \bar{x}_3 \& x_2 \& \bar{x}_1) \vee (x_4 \& x_3 \& \bar{x}_2) \vee (x_5 \& x_3)$$

$$L(y) = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

Gesucht: **Auswahl** von **Primtermen** mit **L(y) minimal**

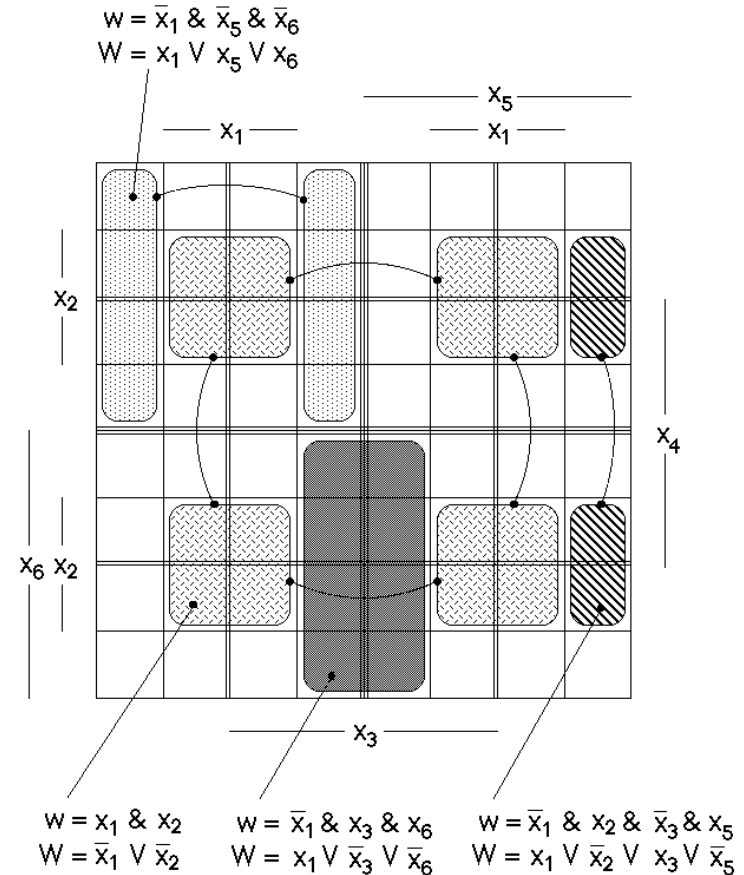
- Die **Minimierung** mit **Symmetriediagramm** stellt eine **graphische Methode** dar -> Ausnutzung der **Symmetrieverhältnisse**

-
- | | | | | | |
|-------|-------|----|----|----|--|
| | x_1 | | | | |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | 0 | 1 | 5 | 4 | |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | 2 | 3 | 7 | 6 | |
| x_2 | 0 | 0 | 1 | - | |
| | 12 | 13 | 17 | 16 | |
| | - | 1 | 0 | 0 | |
| | 10 | 11 | 15 | 14 | |
| | x_3 | | | | |

Minimierung am Symmetriediagramm

→ Finden von **Primblöcken (Primtermen)** in Symmetriediagrammen

- **Sukzessive Bildung** von **Blöcken** aus **Einsstellen** (Nullstellen) und **Freistellen**
→ durch **Spiegelung** von **kleineren Blöcken** (einzelne Einsstellen sind kleinste Blöcke) an allen möglichen **Symmetrielinien**
- **Maximal zusammengefasste Blöcke** von **Einsstellen** sind **Primeinsblöcke**, wenn keine Spiegelung mehr möglich



Minimierungsmethode

Minimierung am Symmetriediagramm

Beispiel (1):

■ Gegeben: $y = f(x_4, x_3, x_2, x_1)$ durch die Angabe der **Eins-** und **Nullstellen** im **Symmetriediagramm**

■ Gesucht: Kürzester algebraischer Ausdruck
→ **Disjunktive Minimalform (DMF)**

■ **Primerterme** zur Bildung einer **DMF** spezifizieren
Primeinsblöcke
→ werden **Primimplikanten** genannt
(*Primimplikate* für Konjunktive Minimalform KMF)

■ Die farbig dargestellten **Primimplikanten**
überdecken **Eins-** und **Freistellen**

		x_1					
		0	1	2	3		
x_2	0	0	1	5	4		
	0	0	1	7	6		
	0	0	1	17	16		
	-	1	0	15	14		
		x_3					
		0	1	2	3		
x_4	0	1	2	3			
	0	1	2	3			
	0	1	2	3			
	0	1	2	3			

ITIV