Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

Nachrichtenübertragung und Optimale Codes

Codes für die Nachrichtenübertragung

- **Übertragung von Nachrichten und Daten**
  - **Spezielle Anforderungen an Codierung:**

    → Schutz gegen **Verfälschungen** + **typische Fehlerfälle**

    → **Darstellungsaufwand minimieren** **(Kosten, Performanz)**

  - **Weiteres Problem:** Annahme des **Einzelfehlerfalls** trifft häufig in **Übertragungssystemen nicht zu**

    → **zeitlich konzentrierte Fehler**
    (Störung über einen Zeitraum)
    → **Bündelstörungen** treten auf

  - **Also:** **dedizierte zusätzliche Maßnahmen notwendig**

Codes für die Nachrichtenübertragung

- **Bündelstörung**
  - **Problem:** eine längere Auswirkung einer Störung auf ein Signal
  - Dadurch können **mehrere Bits** nacheinander **gestört** werden
  - **Bündelfehler:** bisher besprochene Codes sind nicht geeignet

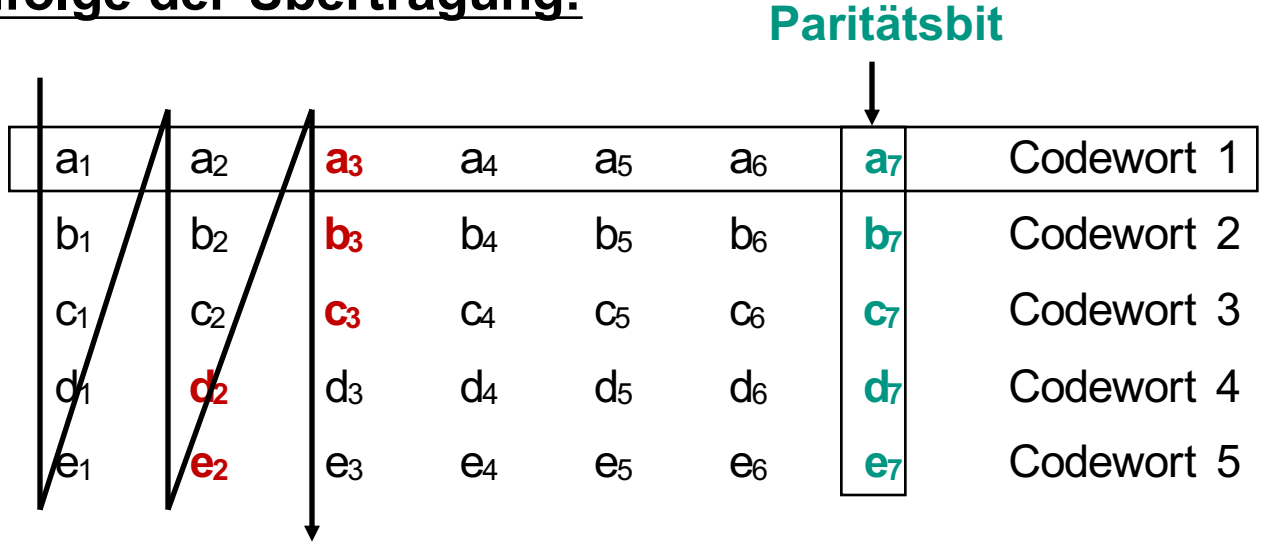
  - **Lösung:** Bei der **Zeichenverflechtung** werden die **Binärstellen** eines Zeichens (Binärwort) **nicht** nacheinander übertragen
    → **Verwürfelung** oder ***Scrambling*** der Stellen

  - **Also:** länger **anhaltender Störeinfluss** (Bündelstörung) bestimmter Länge **verfälscht** nur **Binärstellen** von **unterschiedlichen** Codewörtern

Bündelstörung: Zeichenverflechtung

Geänderte Reihenfolge der Übertragung:

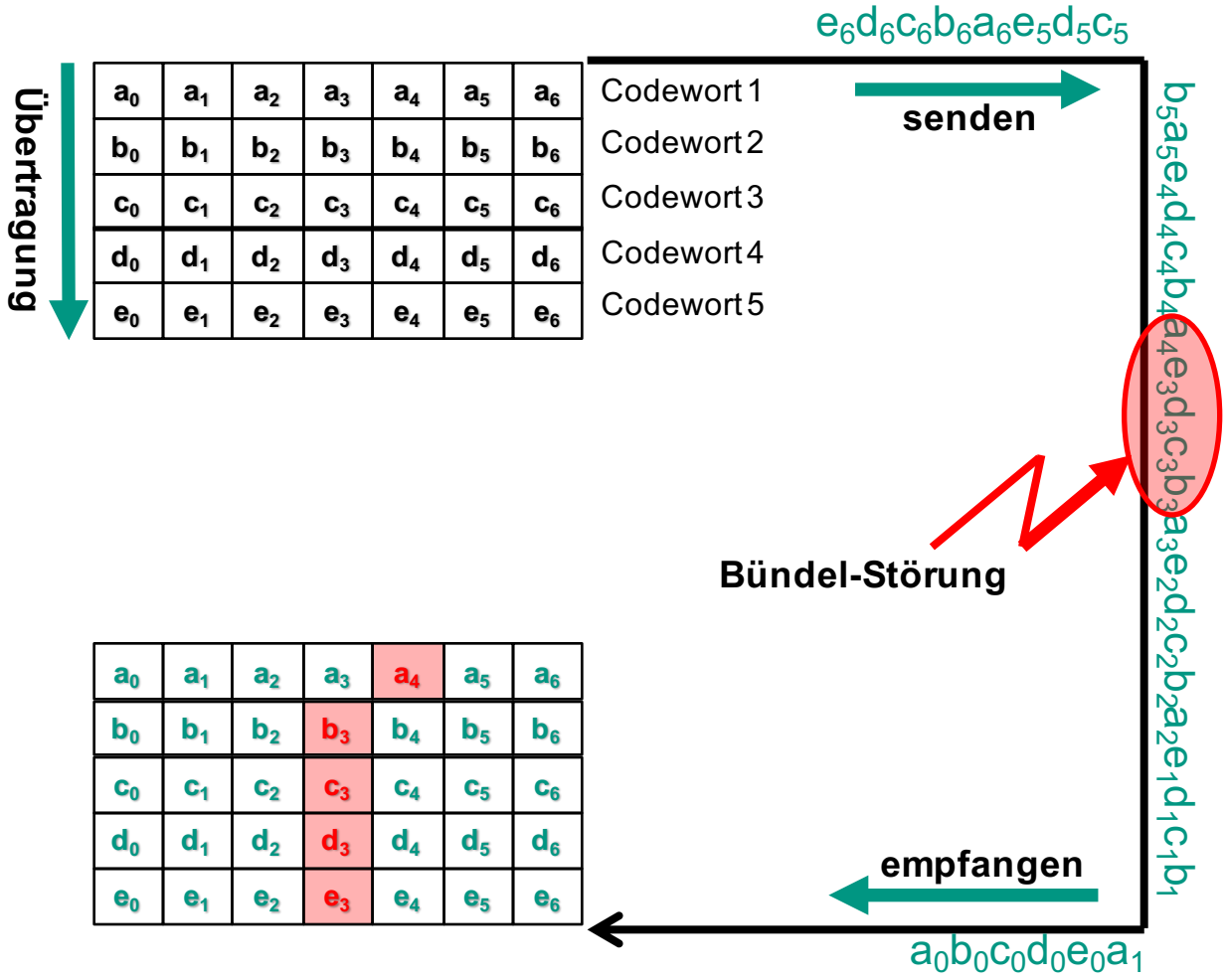
Übertragung mit Anwendung der **Zeichen-verflechtung** ("*Scrambling*")



- Eine **Störung** von maximal **5 aufeinanderfolgenden Bits** ist damit **erkennbar**
- **Trotz andauernder Störung:**
  - → pro Codewort nur **1 Bit verfälscht**
  - → **Paritätsbit (7. Bit)** detektiert Einzelfehlerfälle

Bündelstörung: Fehlererkennung/Korrektur

- **Beispiel für eine Übertragung mit Bündelstörung:**



Allgemein gilt:

erlaubt der benutzte **Code Fehler-erkennung** bzw. **Fehlerkorrektur** → **gesamte Bündelfehler** ist **erkennbar** bzw. **korrigierbar**

Optimale Codes

- Neben der **Fehlersicherheit** spielt bei der Übertragung auch die **Länge einer Nachricht** eine Rolle
- Der ***Morse-Code*** hat schon früh die **statistischen Eigenschaften** der englischen Sprache ausgenutzt, um eine möglichst **kurze Darstellung** der **Nachricht** zu erzielen
- **Häufig auftretende Buchstaben** werden möglichst **kurzen Codewörtern** zugeordnet, während für seltene Buchstaben längere Codewörter gewählt werden

- **Beispiel Morse-Code:**

häufige Buchstaben				seltene Buchstaben			
e:	·	t:	-	j:	·---	q:	--·-
i:	··	a:	·-	y:	-·--	ö:	---·

Optimale Codes

- **Optimale Codes** versuchen die im Mittel auftretende **durchschnittliche Codewortlänge *m*** zu **minimieren**
- Der **minimal erreichbare Idealwert** ist dabei der **durchschnittliche Informationsgehalt H** des Zeichenvorrats -> **Entropie** der Sendequelle
- Für einen Zeichenvorrat $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ gilt:

∅ Informationsgehalt H:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot H_e(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot ld \frac{1}{p(x_i)}$$

∅ Codewortlänge m:

$m(x_i)$: Länge CW für X_i

$$\overline{m} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot m(x_i)$$

Optimale Codes: Shannon-Fanø-Code

- **Konstruktionsvorschrift:**
  - **Zeichenvorrat** nach **aufsteigender Wahrscheinlichkeit** linear sortieren → **lineare Ordnung**
  - **Zwei Teilmengen** so konstruieren, dass die **Summen-wahrscheinlichkeiten** der beiden Teilmengen möglichst **gleich groß** sind, d.h. die addierten Auftrittswahrscheinlichkeiten der in beiden Teilmengen enthaltenen Zeichen ergeben möglichst die gleiche Summe
  - Die **erste Teilmenge** erhält das **Codierungszeichen "0"** und die **zweite Teilmenge eine "1"**
  - Mit den jeweils **resultierenden Teilmengen rekursiv** in **gleicher Weise** fortfahren
    → bis nur noch 1 Zeichen in resultierenden Teilmengen enthalten ist

Shannon-Fanø-Code

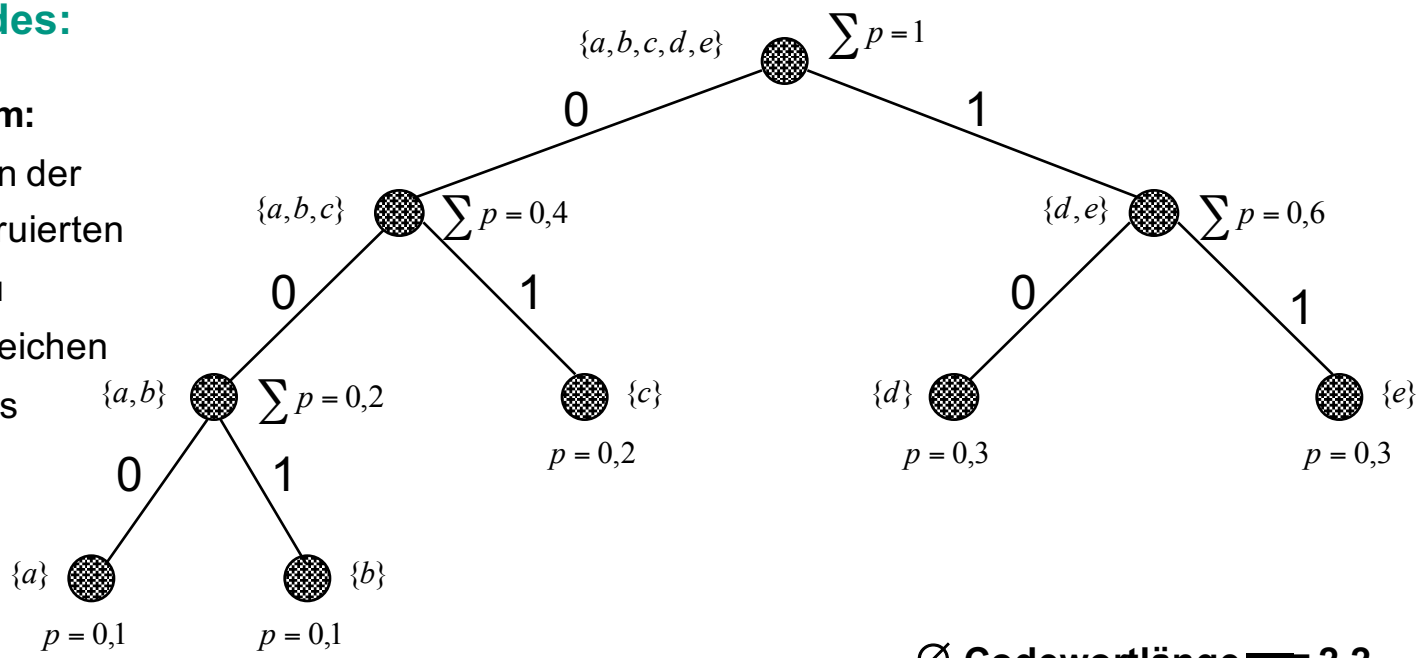
- **Beispiel:**

Zeichen	a	b	c	d	e
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Konstruktion des optimalen Codes:

Codierungsbaum:

→ Repräsentation der rekursiv konstruierten Teilmengen zu codierender Zeichen und ihre Codes



∅ **Codewortlänge ~~m~~ = 2,2**

Codierung:

Zeichen	a	b	c	d	e
Kodierung	000	001	01	10	11

Optimale Codes: Huffman-Code

Beschreibung der Eigenschaften und Konstruktion

- **Effiziente Codierungstechnik für Datenkompression (*JPEG*, *MPEG*)**
- **Codierung mit variabler Bitlänge der Codewörter**
  - **effizienter als Codierung mit fester Bitlänge**
- **Präfixfreie-Codierung**
  - **kein Kodewort ist Präfix eines anderen Codewortes**
- **Vorgehensweise graphisch darstellbar**
  (***binärer Baum***, siehe auch Graphentheorie in Kap. 5.3 im Buch)
  - **Blätter repräsentieren Codewörter**
  - **der Weg dorthin das eigentliche Codewort**
- **Vorgehensweise Huffman-Codierung: *Greedy-Algorithmus* (*greedy* = "gierig")**
  → nutzt Liste mit Auftrittswahrscheinlichkeiten der zu codierenden Zeichen

Optimale Codes: Huffman-Code

Huffman's Codierungs-Algorithmus (HKA) (1)

- **HKA ist ein *Greedy-Algorithmus***
- **HKA konstruiert einen *Baum*** (= azyklischer zusammenhängender Graph) **T, der die *Codierung* der einzelnen Zeichen repräsentiert**
- **Sortierte Liste Q → jeweils die beiden Zeichen in Q mit niedrigsten Auftrittswahrscheinlichkeiten (AWS) finden**
- **Zwei gefundene Zeichen werden zu neuem *Element z* "verschmolzen", dessen AWS die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten zugeordnet wird**

  → Einsortierung von z in Q entsprechend seiner AWS
- **Abbruch des HKA:**

  nur noch 1 Objekt in Q übrig → *Codierungsbaum* T

Optimale Codes: Huffman-Code

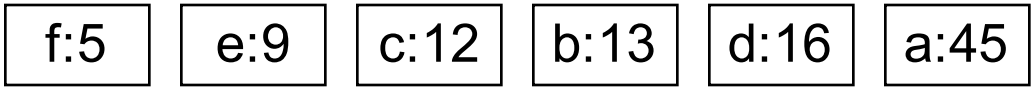
Huffman's Codierungs-Algorithmus (HKA) (2)

```
begin
    n ← |C|;            // C ist sortierte Menge der zu codierenden Elemente
    Q ← C;      // Q ist sortierte Liste (-> verwendete Datenstruktur)
    for i ←1 to n-1 do
        z ← ALLOCATE-NODE();    // Erstellung eines neuen Knotens z im Codierbaum
        x ← EXTRACT-MIN(Q);     // Bestimme Knoten minimaler Auftrittswahrscheinlichkeit (AWS)
                                   in Q, entferne diesen aus Q und speichere ihn in x
        y ← EXTRACT-MIN(Q);     // Bestimme Knoten minimaler AWS in Q, entferne diesen aus
                                   Q und speichere ihn in Y
        left[z] ← x;            // Knoten x wird linker Nachfolgeknoten von z im Codierbaum
        right[z] ← y;           // Knoten y wird rechter Nachfolgeknoten von z im Codierbaum
        f[z] ← f[x] + f[y];     // Bestimmung der AWS des vereinten Knotens z
        INSERT(Q, z);           // neuer Knoten z wird in Q (= Codierbaum) entsprechend seiner AWS
    end;
    return EXTRACT-MIN(Q);  // letztes verbleibendes Listenelement in Q (= Wurzel des Codierbaums)
                               wird als Endergebnis ausgegeben
end
```

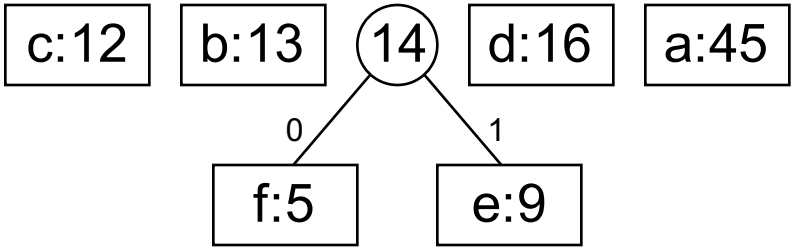
Optimale Codes: Huffman-Code

Beispiel:

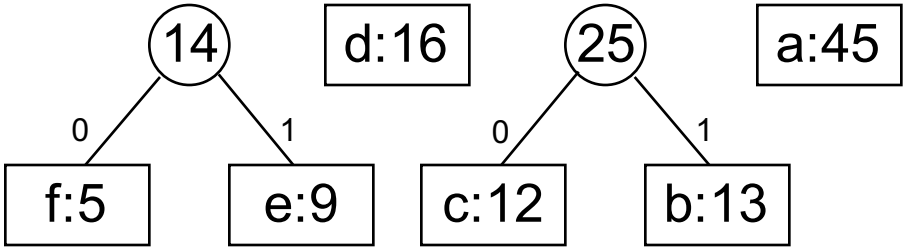
(a)



(b)

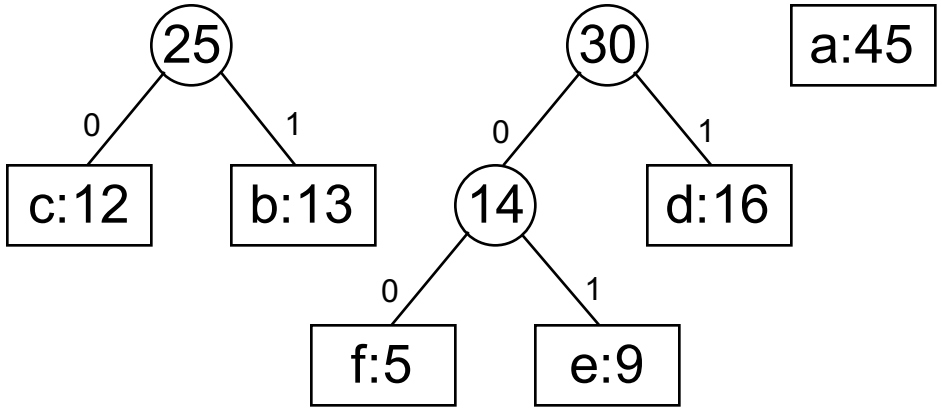


(c)

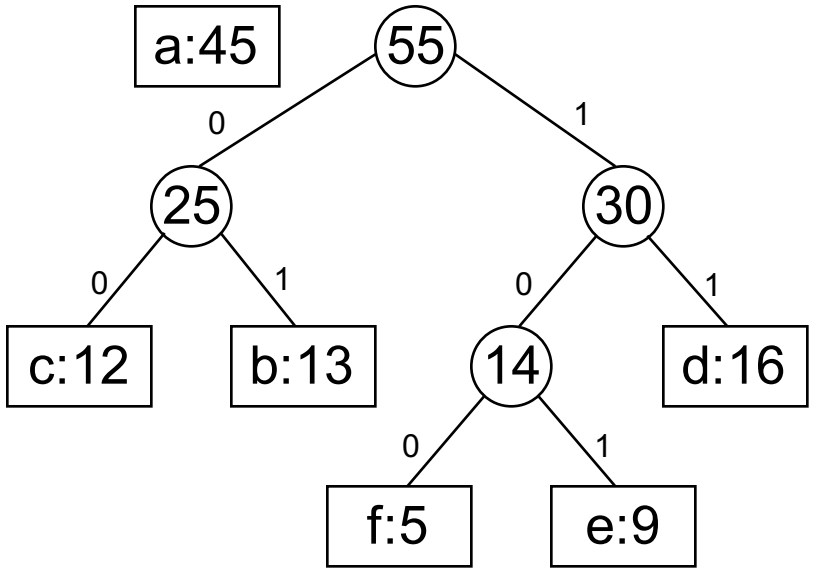


Optimale Codes: Huffman-Code

(d)

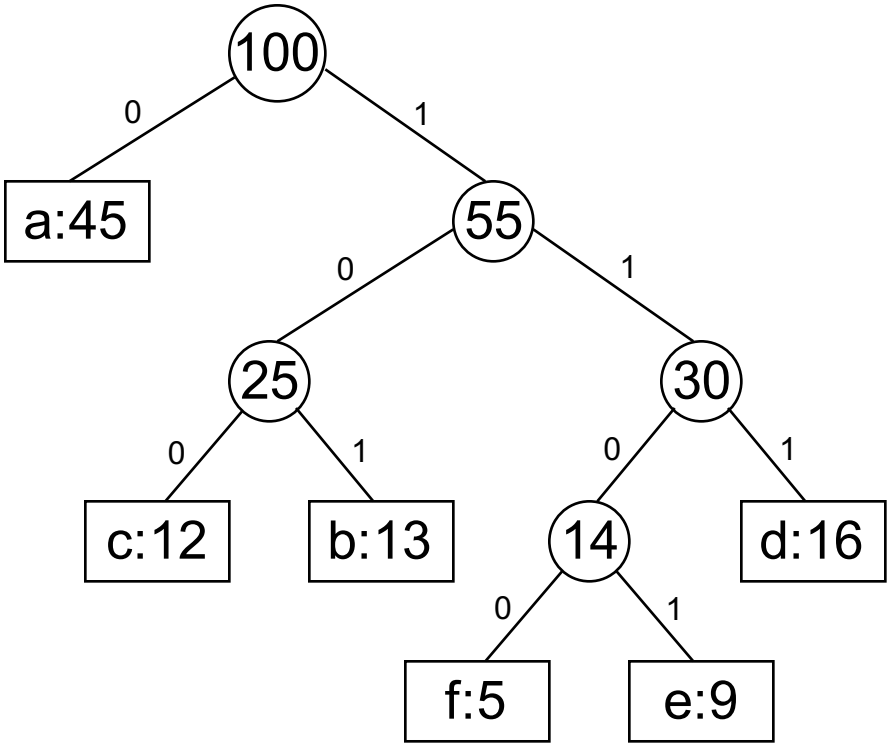


(e)



Optimale Codes: Huffman-Code

(f)



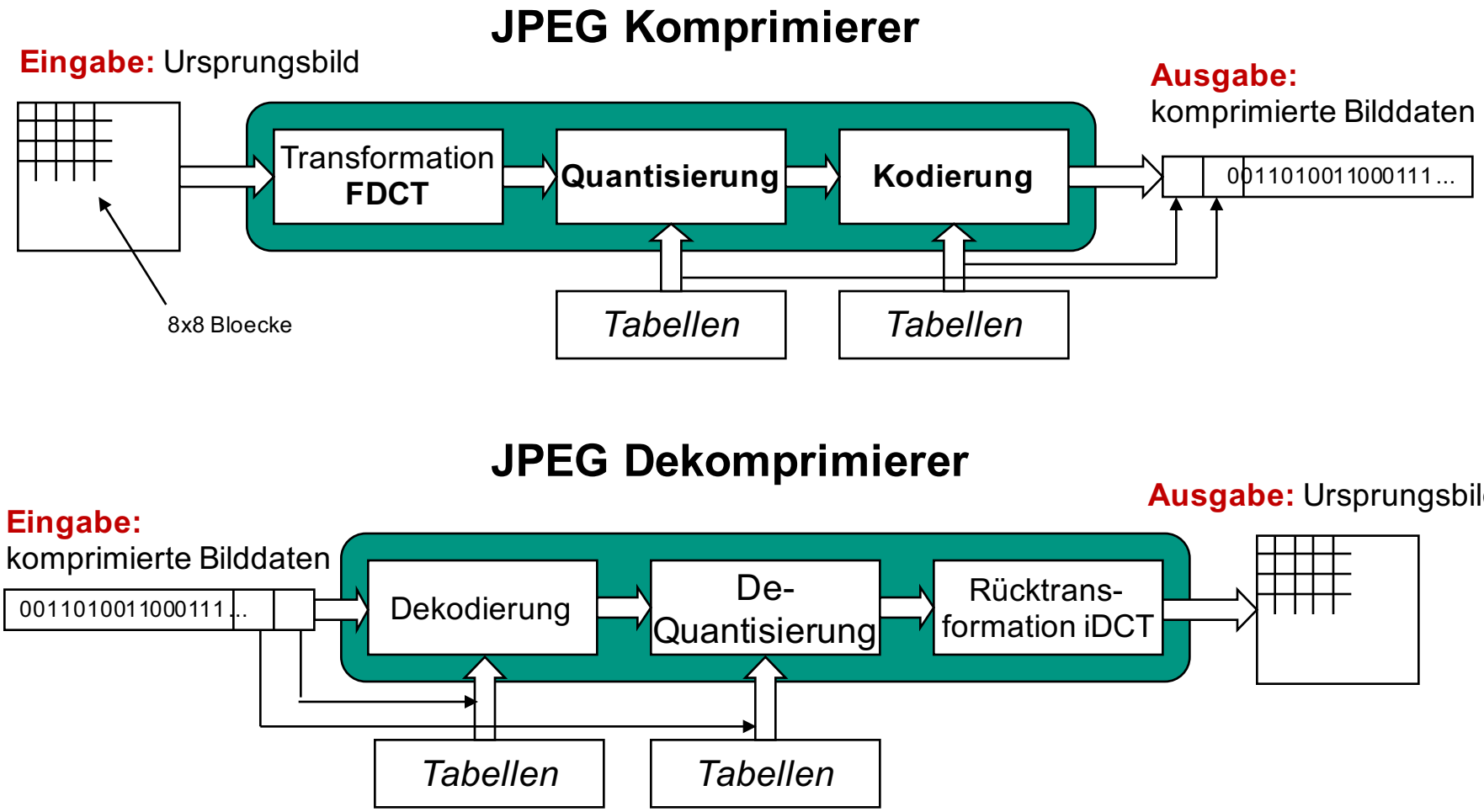
Optimale Codes: Huffman-Code

Anwendung im JPEG-Format:

- **JPEG: J**oint **P**hotographic **E**xperts **G**roup
- **Ziel:** allgemeiner **Standard** für alle Arten von **Bildern** (Color oder Graustufen), die dadurch “portabel” sind
- Ordentliche **Kompressionsraten**
- Dafür **leichter Verlust** an **Bildinformation**
- Verlustfreie Kompression möglich

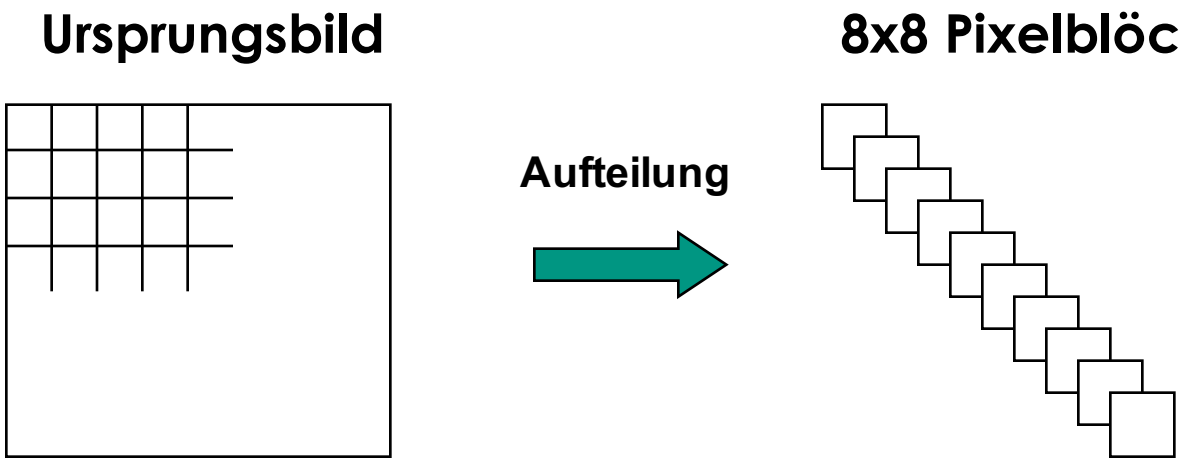
Optimale Codes: JPEG-Verfahren

Übersicht des Komprimierungsverfahrens JPEG:



Optimale Codes: JPEG-Verfahren

- **Aufteilung des zu komprimierenden Bildes in 8x8-Pixelblöcke**
  - **Geeignete Blockgröße** für die **FDCT** um **digitaltechnischen Realisierungsaufwand** zu **optimieren und** den Gesamtaufwand nicht zu hoch zu treiben
  - Bei größeren Blöcken steigt der Rechen- bzw. Kostenaufwand quadratisch an

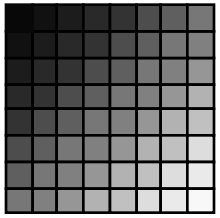


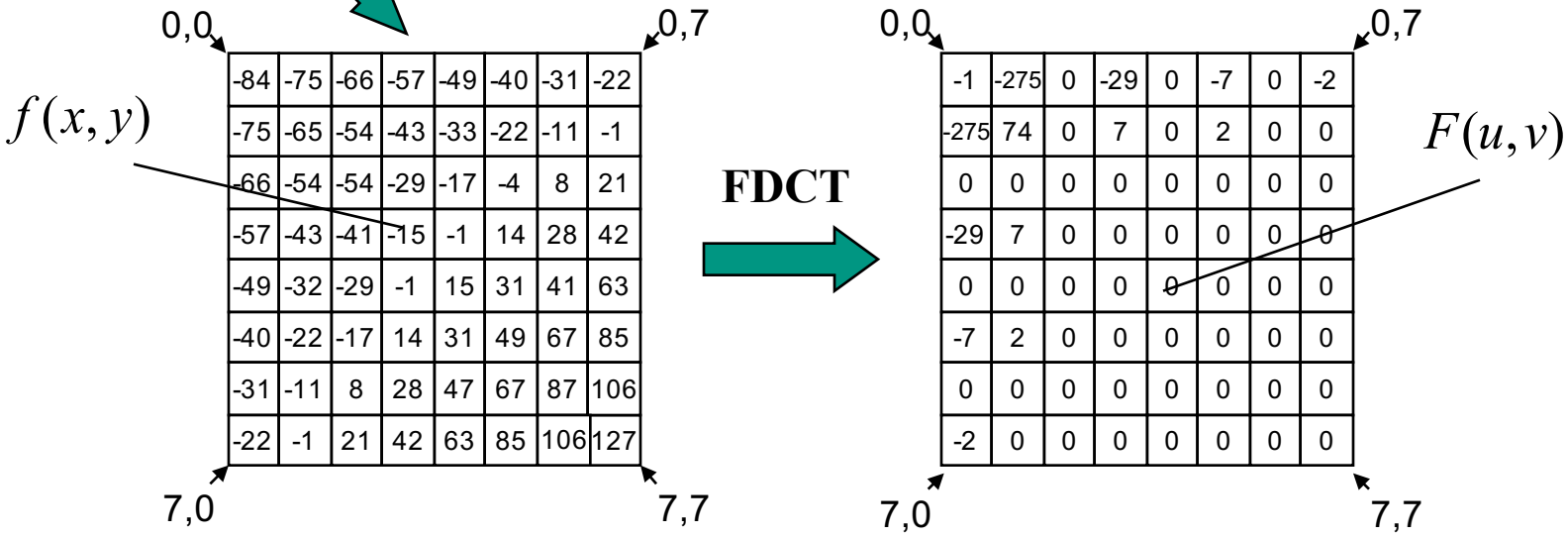
Optimale Codes: JPEG-Verfahren

- **Schnelle diskrete Cosinustransformation (FDCT)** liefert per Block eine Koeffizientenmatrix zurück
- FDCT transformiert Daten aus **Ortsbereich f(i,j)** in **Frequenzbereich F(u,v)**
- **Formel für die FDCT:**

$$F(u,v) = \frac{1}{4} F_u F_v \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} f(x,y) \cos\frac{(2y+1)u\pi}{16} \cos\frac{(2x+1)v\pi}{16}$$

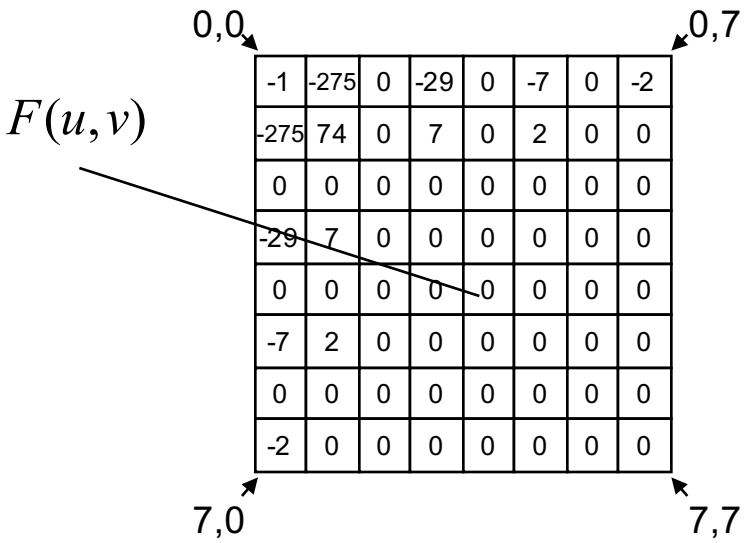
$$F_u, F_v = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{für } u,v = 0 \qquad F_u, F_v = 1, \text{für } u,v = 1 \ldots 7$$





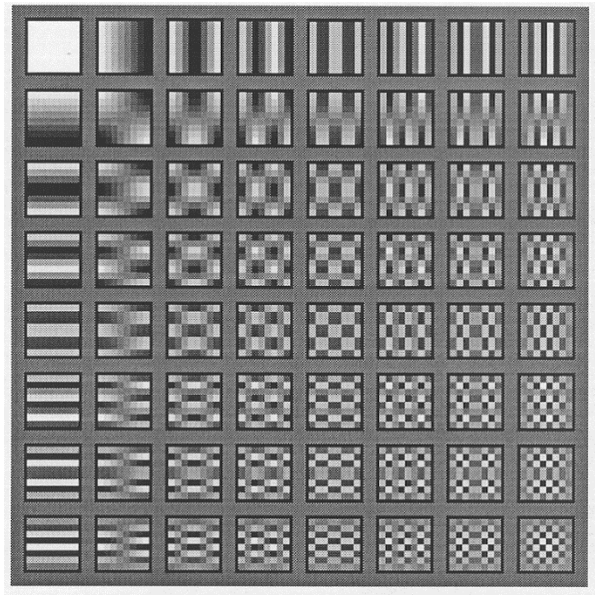
Optimale Codes: JPEG-Verfahren

JPEG-Verfahren: FDCT



-1	-275	0	-29	0	-7	0	-2
-275	74	0	7	0	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-29	7	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-7	2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0

64 Basisfunktionen



Einfluss der Frequenzen eines Blocks auf die transformierte Matrix

- **Einfluss** der **Bildveränderlichkeit** (-> ***Frequenzen***!) auf **einzelne Koeffizienten** der transformierten Matrix
- **Obere linke Koeffizient** (DC-Anteil) wird **größer**, je **monotoner** die **Farbverteilung** ist
- **Untere rechte Koeffizient** wird durch eine **möglichst ungleichmäßige Verteilung** der Werte der zu transformierenden **Pixelmatrix beeinflusst**

Optimale Codes: JPEG-Verfahren

- **Quantisierungsmatrix:** möglichst **viele "Nullen"** in **Transformationsmatrix**
- **Quantisierung:** eigentliche **verlustbehaftete Vorgang** in der JPEG-Kodierung
- **Verlust**: durch **Rundung** nach Division durch **Quantisierungsfaktor Q(u,v)**

JPEG-Verfahren: Quantisierung

$$\text{Formel}: F^{Q}(u,v) = round\left(\frac{F(u,v)}{Q(u,v)}\right), F^{Q'}(u,v) = F^{Q}(u,v) * Q(u,v)$$

Quantisierungsmatrix:

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	58	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

$$\text{Bsp.}: F(3,0) = -29, Q(3,0) = 16$$

$$\Rightarrow F^{Q}(3,0) = round\left(\frac{-29}{16}\right) = round(-1{,}8125) = \underline{-2}$$

$$\text{nach der De-Quantisierung}: F^{Q'}(3,0) = -2 \cdot 16 = \underline{-32}$$

-1	-275	0	-29	0	-7	0	-2
-275	74	0	7	0	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-29	7	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-7	2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0

Quantisierung

0	-25	0	-2	0	0	0	0
-23	6	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

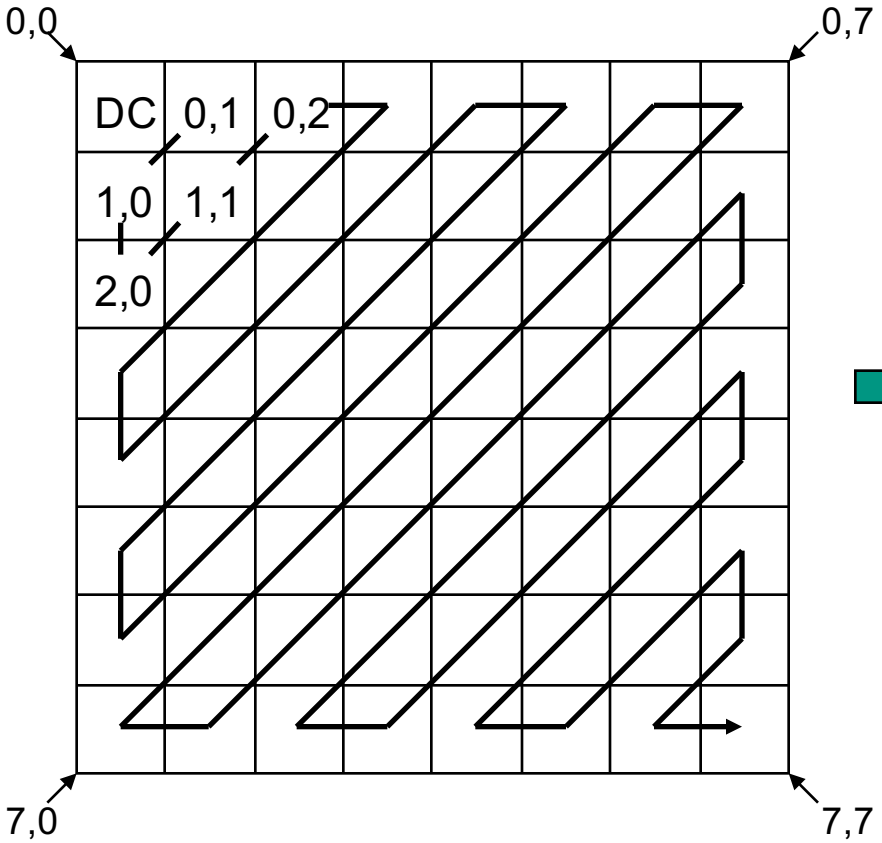
De-Quantisierung

0	-275	0	-32	0	0	0	0
-276	72	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
-28	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

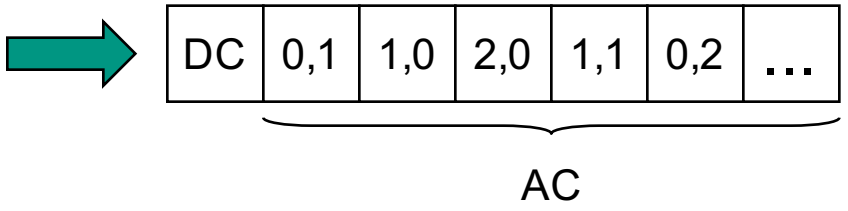
Optimale Codes: JPEG-Verfahren

JPEG-Verfahren: Kodierung (1) – ZigZag Kodierung

- Die **8x8 Koeffizientenmatrix** (Frequenzbereich) **nach Cosinus-Transformation** mittels des ***Zig-Zag-Verfahrens*** in "***Stream***" von **64 Elementen** umformen
  -> Dadurch wird **Sequenz** mit möglichst **langen Nullfolgen** gebildet



JPEG – ZigZag-Scan

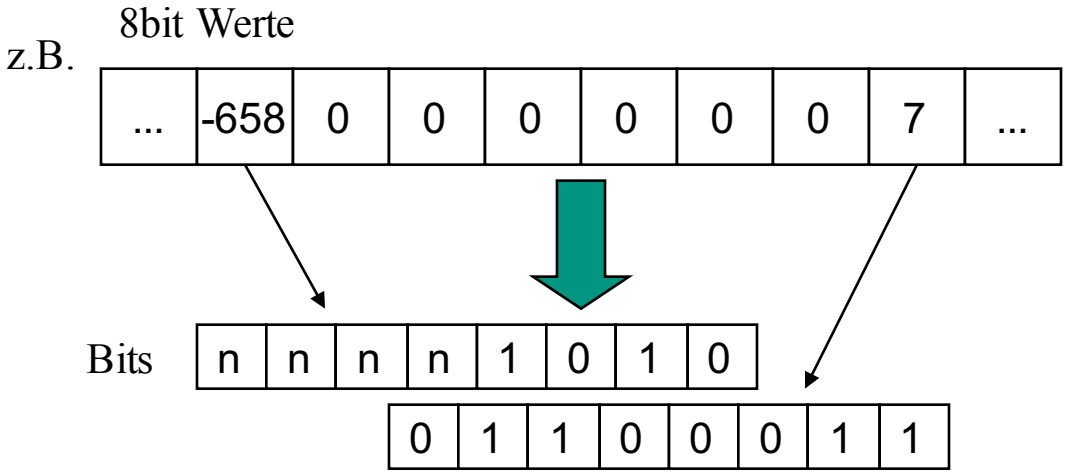


Optimale Codes: JPEG-Verfahren

JPEG-Verfahren: Kodierung (2) – Run-Length Kodierung

- **aus ZigZag-Scan** entstandene **Streams** werden nun komprimiert
- **zuerst:** ***Run-Length-Encoding***, um lange Nullfolgen platzsparend zu kodieren
- **ZigZag-geordnete AC-Koeffizienten** werden so kodiert, dass nur **AC-Koeffizienten ungleich Null** in Binärvektorform (**RRRRSSSS**) dargestellt werden, **wobei:**
  - **RRRR** (4-Bit) -> **Anzahl der Nullen vor** dem **aktuellen Koeffizienten** angibt
  - **SSSS** (4-Bit) -> **Wertebereiche** der **Koeffizienten** gemäß unterer Tabelle repräsentiert
- der **SSSS-Subvektor** bestimmt **höherwertige Bits** der **AC-Koeffizienten**, die **niederwertigen Bits** werden **unkodiert** an das **RS-Symbol** angehängt

SSSS	AC-Koeffizienten
1	-1,1
2	-3...-2,2...3
3	-7...-4,4...7
usw.	
10	-1023...-512,512...1023



Optimale Codes: JPEG-Verfahren

JPEG-Verfahren: Kodierung (3) – Huffman Kodierung

- **letzte Schritt:** gebildete RS-Elemente werden **Huffman-kodiert**
- **Betrachtet:** **Häufigkeit** des **Auftretens** der **RS-Werte**
- **häufig vorkommende Elemente**: **kurz kodiert**
  selten vorkommende Elemente: **lang kodiert**
- **entweder:** ein **Huffman-Kode** aus **gegebenen Daten (AWS)** ermittelt,
  oder: eine **Standardtabelle** verwendet (kleiner Ausschnitt s. Tabelle)
- **Huffman-Codierung** ist **verlustfrei**
- Mit **verschiedenen Tabellen** werden unterschiedliche **unterschiedliche Kompressionsraten** erreicht
- **niederwertige Bits** der **AC-Koeffizienten** werden **unkodiert** belassen

Kodierungstabelle

RRRR	SSSS	Huffman-Code-Wort
0000	0000	1010 (EOB)
0000	0001	00
0000	0010	01
0000	0011	100
0000	0100	1011
0000	0101	11010
0000	0110	1111000
0000	0111	11111000
0000	1000	1111110110
0000	1001	1111111110000010
0000	1010	1111111110000011

Optimale Codes: JPEG-Verfahren

JPEG – Kompression Beispiele

Originalbild

25x Komprimiert

75x Komprimiert

Optimale Codes: JPEG-Verfahren

25x Komprimiert

50x Komprimiert

99x Komprimiert