Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

Hamming Codes

Hamming-Codes

Systematik: Code-Konstruktion zur Fehlererkennung / Fehlerkorrektur

- **Satz:** HD_{min} <-> Anzahl erkennbarer / korrigierbarer Fehler

a.) Sei $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ein Code mit **$HD_{min}(X) = d$**

→ dann sind bis zu **d –1 Fehler erkennbar !**

b.) Sei **$HD_{min}(X) = d = 2e + 1$**

→ dann sind bis zu **e = (d – 1) / 2 Fehler korrigierbar !**

Beweis:

Zu a.): (d – 1) Fehler: **kein** gültiges Codewort in anderes Codewort überführbar

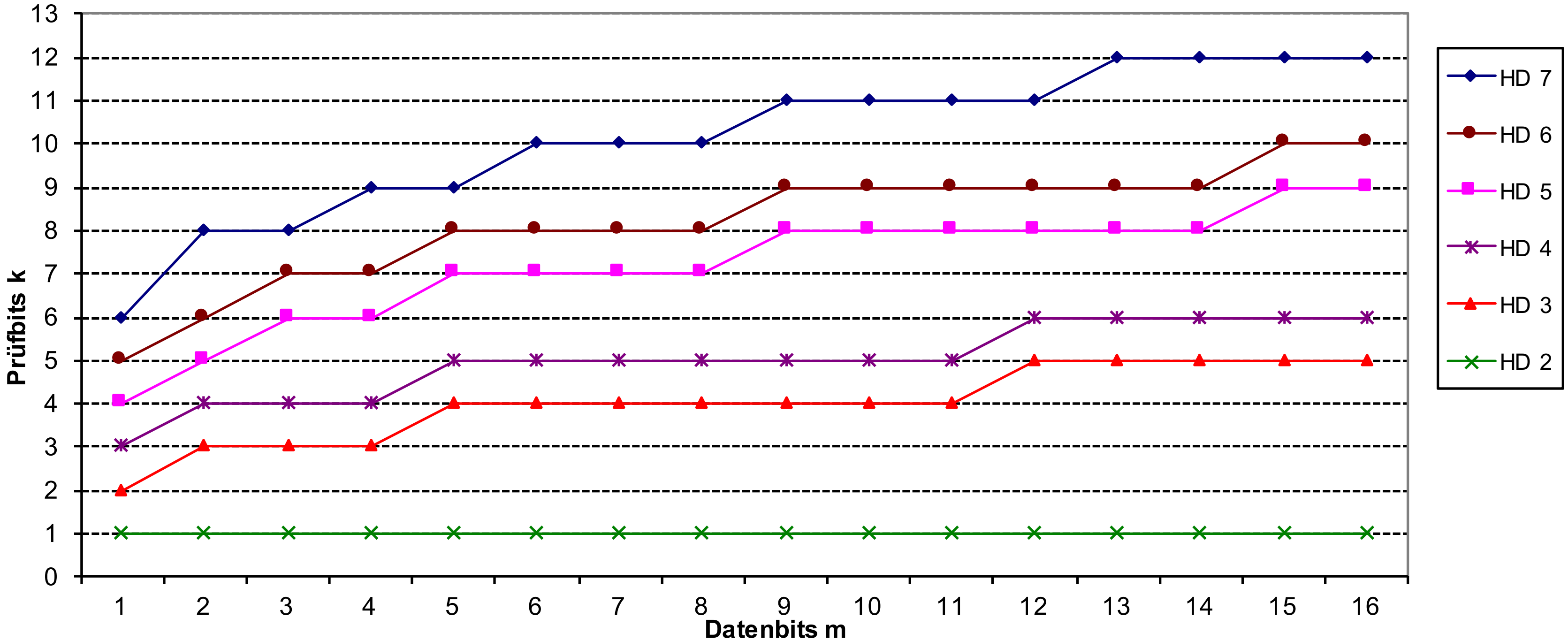
Zu b.): **jedes empfangene** Codewort **CW_i** mit höchstens **e´** (**≤ e) Fehlern** unterscheidet sich vom **gesendeten** Codewort **CW_j** an höchstens **e´** Stellen, d.h. von jedem anderen **gültigen Codewort $CW_k \in X$** unterscheidet sich **CW_i** an **mindestens** $(2e + 1) - e' \geq 2e' + 1 - e' = \underline{e' + 1}$ **Binärstellen**

also: **$HD_{ik} \geq e' + 1$,** d.h. das ursprünglich **gesendete** Codewort **CW_j** ist **eindeutig** aus dem **empfangenen** (ggf. fehlerhaften) **CW_i zuzuordnen**!

Hamming-Codes

Prüfbare und korrigierbare Codes:

→ Systematische Konstruktion



→ Notwendige Anzahl von **Prüfstellen k**
in Abhängigkeit von der Anzahl der **Informationsstellen m**
um **minimale Hamming-Distanz HD_{min} = d** zu erhalten

→ Systematische **Codes** nach **Hamming**

Hamming-Codes

Systematik: Konstruktion von Hamming-Codes

Zuordnung der geprüften Stellen zu den Prüfstellen:

Prüfstellen	der Prüfstelle zugeordnete Binärstelle	geprüfte Binärstellen
y1	1	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...
y2	2	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, ...
y3	3	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, ...
y4	4	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, ...
.	.	...
.	.	
.	.	

→ **Zuordnung der geprüften Stellen zu den Prüfstellen:**

i. Prüfstelle y_i überprüft **alle Binärstellen (können Informationsstellen m als auch Prüfstellen k sein!),** die in der **i. Stelle (im i. Bit)** der **Dualzahlendarstellungen** der entsprechenden **Binärstellenpositionen ("duale Kennzahlen")** eine **"1"** aufweisen

Hamming-Codes

Systematik: Konstruktion von Hamming-Codes

Aufbau eines 1-F-korrigierbaren Codes:

→ Einfachfehler sind korrigierbar: $HD_{min} = 3$

1. Schritt	lfd. Nr. duale Kennzahl	1 001	2 010	3 011	4 100	5 101	6 110	7 111
2. Schritt	1. Stellenbelegung Bestimmung von y1	y1 0		x1 0		x2 1		x3 1
3. Schritt	2. Stellenbelegung Bestimmung von y2		y2 1	x1 0			X4 0	x3 1
4. Schritt	3. Stellenbelegung Bestimmung von y3				y3 0	x2 1	x4 0	x3 1

→ **Zuordnung der geprüften Stellen zu den Prüfstellen:**

Beispiel: **1. Prüfstelle y_1** überprüft **alle Binärstellen,** die in der **1. Stelle (im 1. Bit)** der **Dualzahlendarstellungen** der entsprechenden **Binärstellenpositionen („duale Kennzahlen")** eine **„1"** aufweisen

Hamming-Codes

Beispiel:

1 F-korrigierbare Codes:

→ **m = 4**: Informationsstellen

→ **k = 3**: Prüfstellen

→ Zuordnung zu Dezimalzahlen

→ **Beispiel: Konstruktion der Prüfbits für 7. CW**

Codewort (CW)		x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	Dezimalzahl
1.	CW	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	CW	0	0	0	1	0	1	1	1
3.	CW	0	0	1	0	1	1	1	2
4.	CW	0	0	1	1	1	0	0	3
5.	CW	0	1	0	0	1	0	1	4
6.	CW	0	1	0	1	1	1	0	5
7.	**CW**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**6**
8.	CW	0	1	1	1	0	0	1	7
9.	CW	1	0	0	0	1	1	0	8
10.	CW	1	0	0	1	1	0	1	9
11.	CW	1	0	1	0	0	0	1	10
12.	CW	1	0	1	1	0	1	0	11
13.	CW	1	1	0	0	0	1	1	12
14.	CW	1	1	0	1	0	0	0	13
15.	CW	1	1	1	0	1	0	0	14
16.	CW	1	1	1	1	1	1	1	15