Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Digitaltechnik

Zahlensysteme

Zahlensysteme

- **Zahlensysteme** dienen zur transparenten **Darstellung** von Zahlen durch **geeignete Ziffern** und deren **systematischen Anordnung**
  -> elementar für die **Mechanisierung/Automatisierung**
  in der **Digital**- sowie **Rechentechnik**

- **Polyadische Zahlensysteme** geben den **Ziffern** ihren **Wert** in **Abhängigkeit** von ihrer **Stelle** innerhalb der systematischen stellenorientierten **Anordnung**

- Das **Dezimalsystem** ist der uns **geläufigste Vertreter** der polyadischen Zahlensysteme

- Die **Stellenwerte** entsprechen den **Potenzen** der **Basis** des jeweiligen **polyadischen Zahlensystems**

Polyadische Zahlensysteme: Aufbau

Beispiele:

$1689_{10} = 1 * 10^3 + 6 * 10^2 + 8 * 10^1 + 9 * 10^0 = 1689$

$1022_3 = 1 * 3^3 + 0 * 3^2 + 2 * 3^1 + 2 * 3^0 = 35$

$1011_2 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 11$

$41_{12} = 4 * 12^1 + 1 * 12^0 = 49$

Allgemein: **Aufbau einer Zahl N**

$$N = d_n * R^n + ... + d_1 * R^1 + d_0 * R^0$$

N: **Zahl im Zahlensystem**

R: Basis, (Grundzahl, Radix) $R \geq 2$

R^i: Wertigkeit der i-ten Stelle

d_i: **Ziffer der Stelle i**

Z: Menge der Ziffern: $d_i \in Z = \{0,1,2, ... , R-1\}$

Polyadische Zahlensysteme: Beispiele (1)

Dualsystem (Binärsystem):

$R_B = 2$ (**Basis**)

$Z_B = \{0,1\}$

Beispiel:

$$1101_2 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 13$$

- Lässt sich in **Hardware effizient darstellen** und **verarbeiten**
- bei relativ **kleinen Zahlen** im Dualsystem
  - → sehr **viele Ziffern** zur **Darstellung** notwendig
  - → man fasst oftmals **3** oder **4 Ziffern zusammen**
  - → resultiert in **Oktal-** oder **Hexadezimalsystem**

Polyadische Zahlensysteme: Beispiele (1)

Zahlendarstellung im Dualsystem:

- **Dualzahlen:**
  - → Repräsentation einer Zahl mit **Binärstellen** in **polyadischer Darstellung** und Interpretation
  - → wenn **Ziffernvorrat** in **einer Stelle erschöpft**, erfolgt ein ***Übertrag*** in nächsthöhere Stelle
- **Dualsystem:**
  - → grundlegende Zahlensystem für die numerische Verarbeitung in der Digitaltechnik

Dezimalzahlen				Dualzahlen				
10^3	10^2	10^1	10^0	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
			0					0
			1					1
			2				**1**	0
			3				1	1
			4			**1**	0	0
			5			1	0	1
			6			1	**1**	0
			7			1	1	1
			8		**1**	0	0	0
			9		1	0	0	1
		1	0		1	0	**1**	0
			:					:
			:					:
		1	9	1	0	0	1	1
		2	0	1	0	**1**	0	0

Polyadische Zahlensysteme: Beispiele (2)

Oktalsystem:

$R_O = 8$

$Z_O = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

- **1 Ziffer** im **Oktalsystem** entspricht genau **3 Ziffern** im **Dualsystem**

Beispiele: **Oktalzahlen**

Dezimal:	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Oktal:	0_O	1_O	2_O	3_O	4_O	5_O	6_O	7_O	10_O	11_O

Dezimal:	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
Oktal:	12_O	13_O	14_O	15_O	16_O	17_O	20_O	21_O	22_O	23_O

Polyadische Zahlensysteme: Beispiele (3)

Hexadezimalsystem:

$R_H = 16$

$Z_H = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

- **1 Ziffer** im **Hexadezimalsystem** entspricht genau **4 Ziffern** im **Dualsystem**
- **2 Ziffern** im **Hexadezimalsystem** zusammengefasst -> **1 Byte (8 Bit)**

- **Beispiele:** **Hexadezimalzahlen**

Dezimal:	**0**	**1**	**...**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Hexadezimal:	0_H	1_H	...	9_H	A_H	B_H	C_H	D_H	E_H	F_H	10_H
Dezimal:	**17**	**18**	**...**	**158**	**159**	**160**	**161**	**162**	**163**	**164**	**...**
Hexadezimal:	11_H	12_H	...	$9E_H$	$9F_H$	$A0_H$	$A1_H$	$A2_H$	$A3_H$	$A4_H$	...

Polyadische Zahlensysteme: Wandlung

Umrechnung: **Dualsystem -> Oktal- bzw. Hexadezimalsystem**

$110_B = 6_O$

$011_B = 3_O$

$110\ 011_B = 63_O$

$1011\ 0010_B = B2_H$

$255_D = FF_H$

- **3 Ziffern** im **Dualsystem** werden zu genau **1 Ziffer** im **Oktalsystem** zusammengefasst
- **4 Ziffern** im **Dualsystem** werden zu genau **1 Ziffer** im **Hexadezimalsystem** zusammengefasst
  -> sehr gut für **byte-orientierte** Darstellungen
  -> 2 Hexadezimalzahlen = 1 byte

Also:

→ **kompaktere Darstellung grosser Dualzahlen im Oktal- bzw. Hexadezimalsystem**

→ **effizienter Darstellung, Codewandlung sowie Verarbeitung**

Polyadische Zahlensysteme: Wandlung

Wandlung von Zahlensystemen:

- Wenn die **Basis** eines **Zahlensystems** die **Potenz der Basis** eines **anderen Zahlensystems** ist, so sind **Zahlen** zwischen diesen Systemen **sehr leicht umzuwandeln**
- **Zusammenfassung** von **mehreren Stellen** zu einer **einzelnen Ziffer**

Beispiel 1:

$$(1011 \quad 0101 \quad 0001)_B$$
$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$
$$(\ B \quad 5 \quad 1\ )_H$$

- **Wandlung:**

  -> Dual- in Hexadezimalsystem

Beispiel 2:

$$(\ 5 \quad 2 \quad 1\ )_O$$
$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$
$$(101 \quad 010 \quad 001)_B$$

- **Wandlung:**

  -> Oktal- in Dualsystem

Polyadische Zahlensysteme: Wandlung

Wandlung von Zahlensystemen:

- Falls **keine** besondere **Beziehung zwischen** den **Basen** besteht, kann man die **Umrechnung über** das **Dezimalsystem** durchführen

Wandlung zunächst ins Dezimalsystem:

- **Bekannte Formel:** $N_D = d_n * R_D^n + ... + d_1 * R_D^1 + d_0 * R_D^0$

Beispiel: $(FA7E)_H = ?_D$

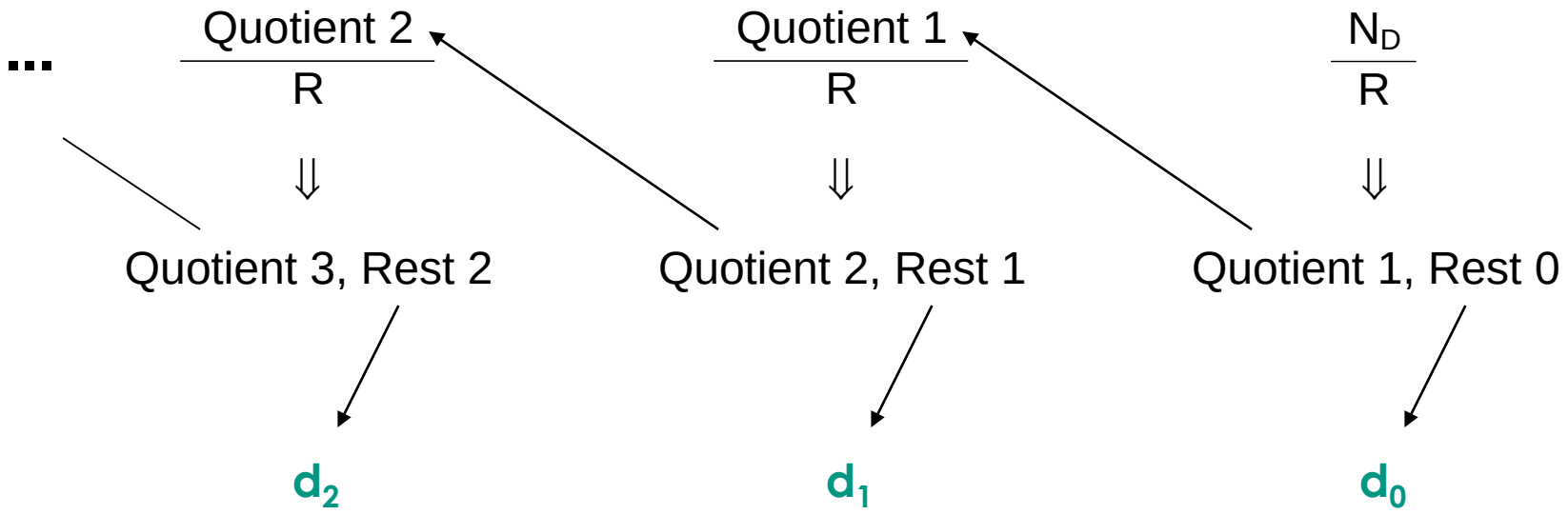
$$
\begin{array}{llll}
(& F & A & 7 & E &)_H \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\
(& F*10^3 + & A*10^2 + & 7*10^1 + & E*10^0 &)_H \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\
(& 15*16^3 + & 10*16^2 + & 7*16^1 + & 14*16^0 &)_D \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\
(& 61440 + & 2560 + & 112 + & 14 &)_D
\end{array}
$$

$= \mathbf{64126_D}$

Polyadische Zahlensysteme: Wandlung

Wandlung von Zahlensystemen:

- Mit Hilfe einer **Ganzzahldivision mit Rest** kann **Umwandlung vom Dezimalsystem** in **System** mit der **Basis R** wie folgt durchgeführt werden:
  -> N_D wird durch R dividiert (Ergebnis Stelle d_0),
  -> entstehende Quotienten rekursiv nach gleichem Schema verarbeiten

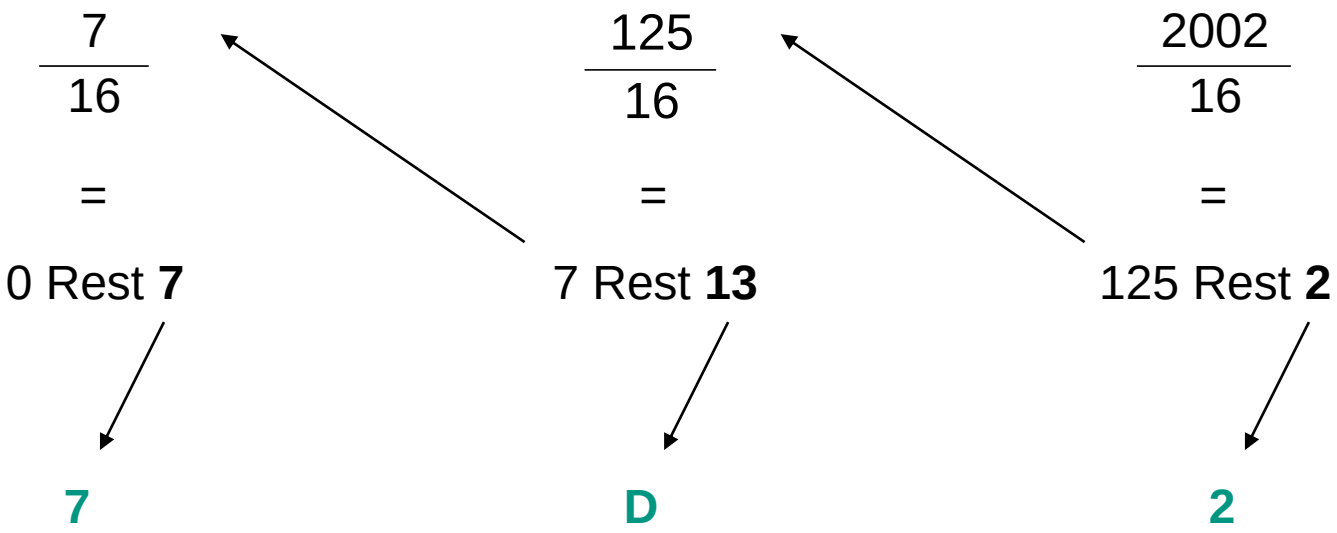


$$N_D = (d_2\, d_1\, d_0)_R$$

Polyadische Zahlensysteme: Wandlung

Beispiel: **Wandlung der Dezimalzahl 2002 in Hexadezimalzahl**

- Umrechnung von 2002_D in das Hexadezimalsystem (R=16):



$$\mathbf{2002_D} = \mathbf{7D2_H}$$

Polyadische Zahlensysteme: Wandlung

- **Wichtig:** es ist wesentlich **einfacher Zahlensysteme umzuwandeln**, wenn man **Ziffern jeweils separat** und **einzeln** behandeln kann

- Bei der oft gebrauchten **Umwandlung** vom **Dezimalsystem in** das **Dualsystem** ist dies **nicht möglich**

- Abhilfe schafft der **BCD-Code** (**B**inary **C**oded **D**ecimal)

- Dieser stellt **jede Dezimalziffer** durch eine **4-Bit Dualzahl** dar

  $$49_D = (\ 0100\ 1001\ )_{BCD}$$

- Die **10 Codewörter**, die den **Ziffern** zugeordnet sind, werden **Tetrade** genannt.
  Die **unbenutzten Codewörter** werden **Pseudotetrade** genannt

  Pseudotetrade: **1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111**

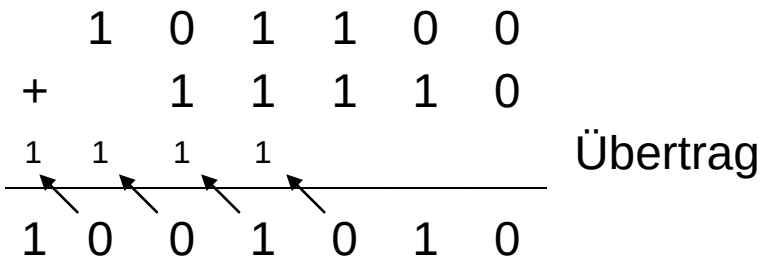
Digitaltechnik: Rechenoperationen

- **Automatisierte Rechenoperationen** sind von **zentraler Bedeutung**
  - → **Basisoperationen** sind: **+, -, *, /**
- **Technische Realisierung:** **Kosten** (Platzbedarf) und **Performanz** wichtig!
  - → **Überlegung:** welche Operationen direkt als Schaltung realisieren ?
- **Rechnen** kann man grundsätzlich in **allen Zahlensystemen**
- Im **Dualsystem** benötigt man besonders **wenig Regeln**:
  - **Regel 1:** 0 + 0 = 0
  - **Regel 2:** 0 + 1 = 1 + 0 = 1
  - **Regel 3:** 1 + 1 = 10
  - **Regel 4:** 1 + 1 + 1 = 11

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Addition:

- **Dualzahlen** können mit den **vorangegangenen Regeln** so **addiert** werden, wie man das schriftliche Addieren schon in der Grundschule lernt



benutzte elementare Regel: **3 3 4 3 2 1**

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Subtraktion:

- Beim **Subtrahieren** von **Dualzahlen** bedient man sich einem Trick: der **Komplementbildung**

- Statt beispielsweise zwei 8-Bit Dualzahlen direkt zu subtrahieren **erweitert** man mit einer **9-stelligen Dualzahl** wie folgt:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a + \underbrace{(1\,0000\,0000_B - \mathbf{b})}_{\mathbf{c}}) - \underbrace{1\,0000\,0000_B}_{\mathbf{d}}$$

- Das **Zweierkomplement** **c** lässt sich einfach wie folgt berechnen:

$$c = 1\,0000\,0000_B - b = (1111\,1111_B - b) + 1_B$$

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Subtraktion:

- Dadurch hat man **allgemeine Subtraktion** durch **folgendes ersetzt**:

  a - **b** = (a + ($1111\ 1111_B$ - **b** + 1)) - $1\ 0000\ 0000_B$

  - **Addition** und **Inkrementierung** (+1) und **zwei spezielle Subtraktionen**

- Einfache Subtraktionen (Sonderfälle):

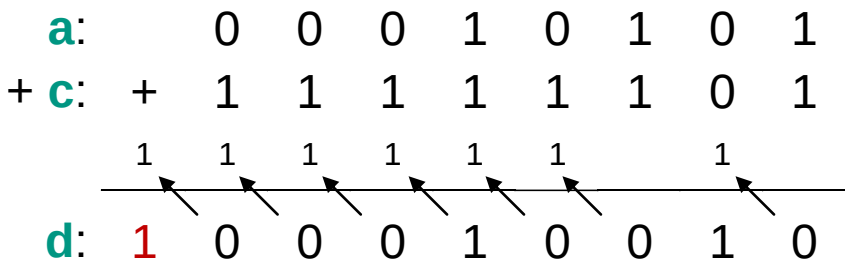
  - ($1111\ 1111_B$ - **b**) berechnet man durch Invertieren aller 8 Bits von b
  - (**d** - $1\ 0000\ 0000_B$) berechnet man wie folgt:

    - Wenn Bit 9 von **d** gesetzt ist:
      - Ergebnis positiv -> Bit 9 von **d** abschneiden, fertig
    - Wenn Bit 9 von **d** gleich null ist:
      - Ergebnis negativ -> Betrag erhält man durch Zweierkomplement:
        Betrag = ($1111\ 1111_B$ - **d**) + 1

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Beispiel: **Subtraktion:** **21 - 3 = ?**

- **a** = $21_D = 0001\ 0101_B$
- **b** = $3_D = 0000\ 0011_B$
- **c** = $(1\ 0000\ 0000_B$ - **b**$) = 1111\ 1111_B$ - **b** + 1 = $1111\ 1100_B + 1 = 1111\ 1101_B$



- **a** - **b** = (**d** - $1\ 0000\ 0000_B$) = $0001\ 0010_B = 18_D$

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Beispiel: **Subtraktion:** **3 - 21 = ?**

- **b** = $3_D = 0000\ 0011_B$
- **a** = $21_D = 0001\ 0101_B$
- **c** = $(1\ 0000\ 0000_B - b) = 1111\ 1111_B - b + 1 = 1110\ 1010_B + 1 = 1110\ 1011_B$

a:		0	0	0	0	0	0	1	1
+ **c**:	+	1	1	1	0	1	0	1	1
							1	1	
d:	0	1	1	1	0	1	1	1	0

- **a - b = (d - 1 0000 0000B) < 0**
- | **a** – **b** | = (Zweierkomplement von d) = **$1111\ 1111_B$ - d** + 1

  = **$0001\ 0010_B = 18_D$**

Digitaltechnik: Rechenoperationen

BCD-Code (Binary Coded Decimal)

Rechnen im BCD-Code

- **Zentrale Stellung** des **Dezimalsystems**:
  → **Konversion** stärker unter **Betonung** der **dezimalen Aspekte**
  → **dezimalstellenweise Wandlung** in **Dualform** (Binärform)

- Wie in den **unterschiedlichen Zahlensystemen** können auch **BCD-kodierte Zahlen verrechnet** werden

- Bei der **BCD-Addition**: ***Pseudotetrade*** können entstehen

- **Zur Korrektur:** zu **Pseudotetraden** und **bei jedem Übertrag** noch **$6_D = 0110_B$ addiert** werden

- Bei der **Addition** von **BCD-kodierten Zahlen** kann der **Bereich** der **Pseudotetraden** nur **einmal „überschritten“** werden
  → es genügt in jedem Fall eine Korrektur

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Beispiel: **Addieren im BCD-Code**

- **Addition** von 839_D und 862_D

	1000	0011	1001	839_D
+	1000	0110	0010	$+ 862_D$
1				
1	**0000**	**1001**	**1011**	

Korrektur wegen: Übertrag, Pseudotetrade

	+0110		+0110
		1	1 1
1	**0110**	**1010**	**0001**

Korrektur wegen: Pseudotetrade

		+0110	
	1	1 1	
Endergebnis: **1**	**0111**	**0000**	**0001** $= 1701_D$

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Erweiterungen BCD-Code (1): STIBITZ-Code

- es hat nicht an Versuchen gefehlt die **negativen Eigenschaften** des **BCD-Codes** zu **vermeiden**
- Für die **Subtraktion** mit Hilfe der **Komplementbildung** ist es nützlich, dass die **Codewörter** mit **Ziffern symmetrisch angeordnet** sind
- Der **STIBITZ-** oder **Exzess-3-Code** erreicht dies, indem **alle Tetraden** im **Vergleich** zum **BCD-Code um $3_D = 0011_B$ größer** sind:

Dezimal	0	1	2	3	4
STIBITZ	0011	0100	0101	0110	0111
STIBITZ	1000	1001	1010	1011	1100
Dezimal	5	6	7	8	9

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Erweiterungen BCD-Code (1): Addition im STIBITZ-Code

- **Codewörter** für Ziffern 0, ..., 4 sind **spiegelbildlich komplementär** zu Ziffern 5, ..., 9
- **Bei Übertrag:** 0011_B muss **addiert** werden
- **Ohne Übertrag:** es muss 0011_B **abgezogen** werden, was durch **Addition** von 1101_B **ohne Übertrag** erreicht werden kann

	0100	0110	1100	139_D
+	0101	0111	0101	$+ 242_D$
	1	1111	1	
	1001	1110	0001	

Übertrag

Korrektur:

	+1101	+1101	+0011	
	~~1~~ 1	~~1~~ 1	1 1	
	0110	1011	0100	$= 381_D$

Digitaltechnik: Rechenoperationen

Erweiterungen BCD-Code (1): AIKEN-Code

- Auch beim **Aiken-Code** sind die Codes der **Ziffern symmetrisch** angeordnet, um eine **einfache Komplementbildung** zu ermöglichen

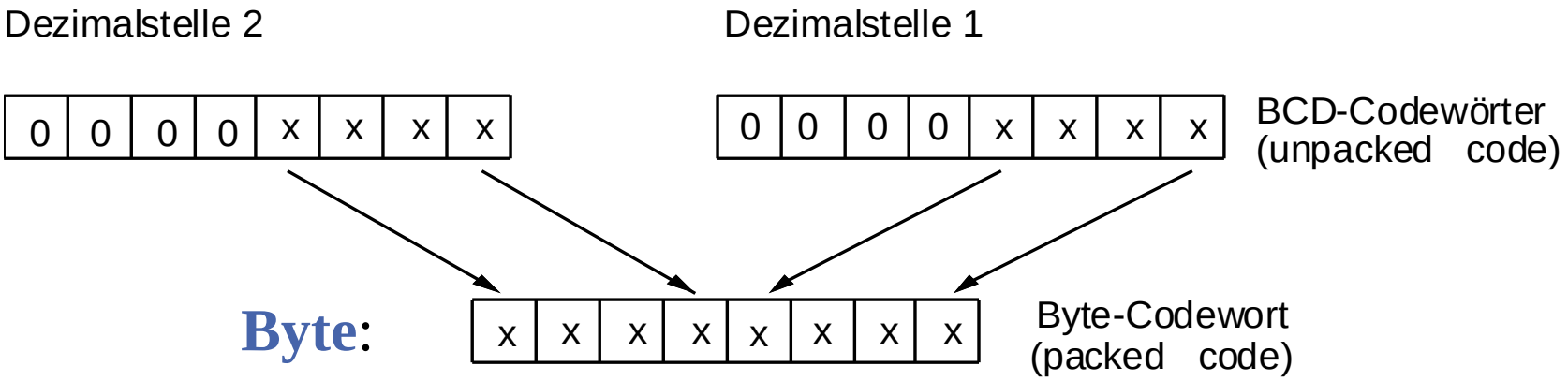
Dezimal	0	1	2	3	4
AIKEN	0000	0001	0010	0011	0100
AIKEN	1111	1110	1101	1100	1011
Dezimal	9	8	7	6	5

- Der **Aiken-Code** wird auch **2-4-2-1-Code** genannt, da dies den **Stellenwerten** der einzelnen **Binärstellen** entspricht
- $\mathbf{1101}_{\text{AIKEN}} = \mathbf{1} * 2 + \mathbf{1} * 4 + \mathbf{0} * 2 + \mathbf{1} * 1 = 7_{\text{D}}$

Digitaltechnik: Zahlendarstellung

Kompakte Zahlendarstellung:

- **vorgestellte Codes** für Dezimalziffern verwenden 4 Bit pro Ziffer
  → **Zusammenfassung** von **2 binär** dargestellten **Dezimalstellen** zu einem **Byte**
- **Kompaktere Darstellung** von BCD-Zahlen und Codes



Digitaltechnik: Zahlendarstellung

- Die bisher vorgestellten Codes haben das **Problem**, dass durch die Anzahl der Codewörter auch der **Zahlenraum eingeschränkt** ist
- **Problemursache**:
  den **Ziffern** sind **feste Stellenwerte** zugeordnet, womit allenfalls sogenannte **Festkommazahlen** realisierbar sind
- Die Lösung ist, wie bei wissenschaftlichen Zahlennotationen üblich, die Angabe eines **zusätzlichen Exponenten**
- Die Darstellung von Zahlen durch **Mantisse** und **Exponent** wird ***Gleitkommazahl*** genannt

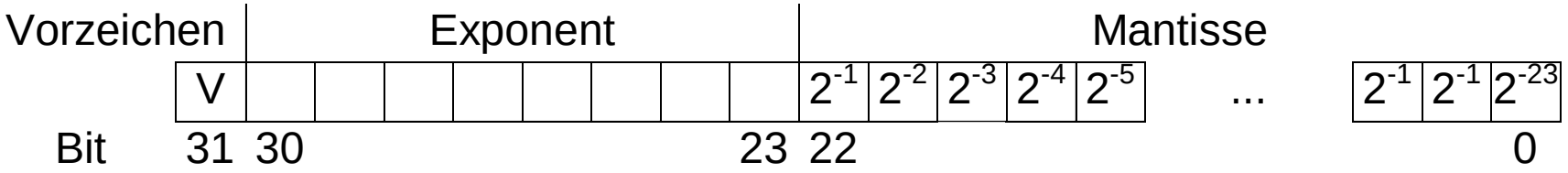
- **Beispiel:**

$$1{,}2345 * 10^{67}$$

Digitaltechnik: Zahlendarstellung

- Da **Gleitkommazahlen** auf sehr unterschiedliche Weise kodiert werden können, hat der **IEEE Richtlinien** festgelegt, wie Gleitkommazahlen dargestellt werden sollen

Gleitkomma-Zahlendarstellung gemäß IEEE-Standard



Exponent E	Mantisse M	Wert
255	≠0	ungültig (NAN)
255	0	$-1^V \cdot \infty$ (±unendlich)
0 < E < 255	**M**	**$-1^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)$**
0	≠ 0	$-1^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$
0	0	$-1^V \cdot 0$

Digitaltechnik: Zahlendarstellung

Gleitkomma-Zahlendarstellung gemäß IEEE-Standard:

Die Zahl π mit 7 Dezimalstellen hinter dem Komma im **IEEE-Format** dargestellt:

$$\pi \approx 3{,}1415926_D \approx 11{,}00100100001111110110\ 10_B$$

$$= (-1^0 \times 2^{128-127})_D \times 1{,}10010010000111111011\ 010_B$$

Ergebnis: $\pi \approx$ **0 10000000 10010010000111111011010**