

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker
becker@kit.edu

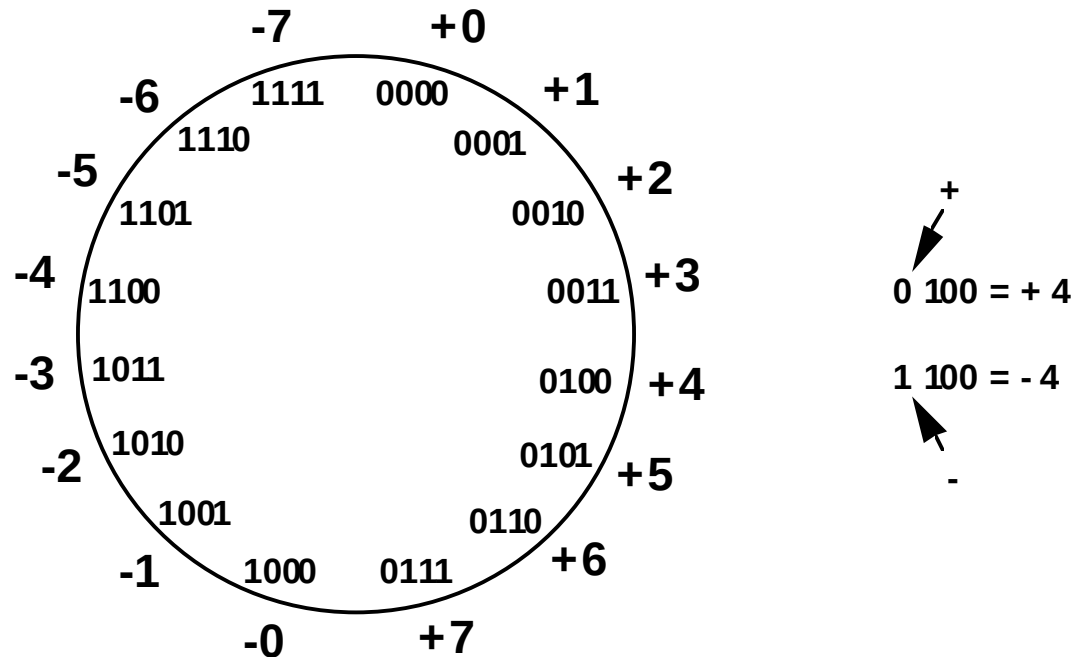
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

Zahlendarstellung und Komplement

Zahlendarstellung

Betrags- und Vorzeichendarstellung



Höchstes Bit ist Vorzeichen: 0 = positiv (oder NULL), 1 = negativ

Die restlichen Bits der Betrag: 0 (000) bis 7 (111)

Zahlenbereich für n Bits = $\pm 2^{n-1}$

Darstellung der Null: 0000 und 1000

Zahlendarstellung

Vorzeichen und Betrag

Schwerfällige Addition/Subtraktion

Vergleich der Beträge nötig zur Bestimmung des Vorzeichens vom Ergebnis

1er Komplement

N ist positive Zahl, dann ist $\overline{N}$ zugehöriges negatives 1er Komplement

$$\overline{N} = (2^n - 1) - N$$

Bsp.: 1er Komplement von 7

Schnelle Methode:

Bitweises Komplement einfach berechnen:

0111 -> 1000

$$2^4 = 10000$$

$$-1 = \underline{00001}$$

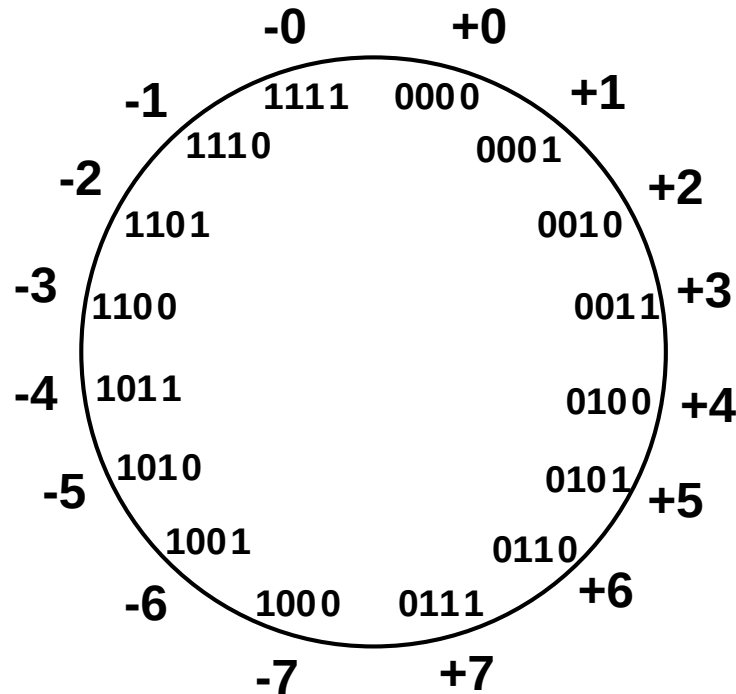
$$1111$$

$$-7 = \underline{0111}$$

$$1000 = -7 \text{ in 1er Komp.}$$

Zahlendarstellung

1er Komplement



$0\ 100 = +4$
 $1\ 011 = -4$

Subtraktion realisiert durch Addition und 1er Komplement

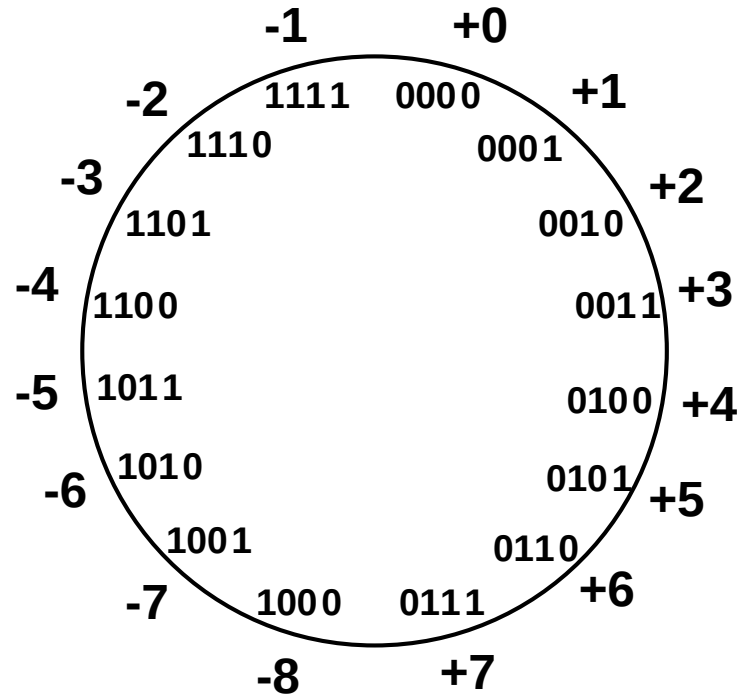
Zwei Darstellungen der Null: Macht Probleme !!!

Addition ist nicht einfach durchzuführen !!!

Zahlendarstellung

2er Komplement (K2)

*wie 1er Kompl.,
zusätzlich jedoch
um eine Position
im Gegenuhr-
zeigersinn
verschoben*



$0\ 100 = +4$
 $1\ 100 = -4$

Nur eine Darstellung der Null

Eine negative Zahl mehr als positive

Zahlendarstellung

2er Komplement (K2) Zahlen

$$N^* = 2^n - N$$

$$2^4 = 10000$$

Bsp.: 2er Komplement von 7

$$\text{sub } 7 = \underline{0111}$$

1001 = -7 im 2er Kompl.

Bsp.: 2er Komplement von -7

$$2^4 = 10000$$

$$\text{sub } -7 = \underline{1001}$$

0111 = 7 im 2er Kompl.

Schnelle Methode:

2er Komplement = Bitweises Komplement + 1

0111 -> 1000 + 1 -> 1001 (Darstellung von -7)

1001 -> 0110 + 1 -> 0111 (Darstellung von 7)

Zahlendarstellung

Addition und Subtraktion

Vorzeichen und Betrag

Ergebnisvorzeichenbit entspricht den Vorzeichenbits der Operanden	4	0100	-4	1100
	<u>+ 3</u>	<u>0011</u>	<u>+ (-3)</u>	<u>1011</u>
	7	0111	-7	1111

Unterscheiden sich Die Vorzeichen, hängt das Ergebnis von den Beträgen der Operanden ab	4	0100	-4	1100
	<u>- 3</u>	<u>1011</u>	<u>+ 3</u>	<u>0011</u>
	1	0001	-1	1001

Zahlendarstellung

Addition und Subtraktion von binären Zahlen

2er Komplement Berechnungen

Wenn Carry-in = Carry-out
dann ignoriere Carry

$$\begin{array}{r} 4 \quad 0100 \\ + 3 \quad 0011 \\ \hline 7 \quad 0111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 1100 \\ + (-3) \quad 1101 \\ \hline -7 \quad 11001 \end{array}$$

Wenn Carry-In ungleich
Carry-Out dann Überlauf!

$$\begin{array}{r} 4 \quad 0100 \\ - 3 \quad 1101 \\ \hline 1 \quad 10001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 1100 \\ + 3 \quad 0011 \\ \hline -1 \quad 1111 \end{array}$$

**Einfaches Vorgehen bei der Addition macht die
2er-Komplement-Darstellung zur ersten Wahl für
Integer-Berechnung in digitalen Systemen**

Zahlendarstellung

Addition und Subtraktion von binären Zahlen

2er Komplement Berechnungen

Warum kann Carry-Out ignoriert werden?

$-M + N$ wenn $N > M$:

$$M^* + N = (2^n - M) + N = 2^n + (N - M)$$

Ignorieren des Carry-out ist wie Subtraktion von 2^n

$-M + -N$ wobei $N + M < \text{oder} = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} -M + -N &= M^* + N^* = (2^n - M) + (2^n - N) \\ &= 2^n - (M + N) + 2^n \end{aligned}$$

Nach dem Ignorieren des Carry die richtige
K2-Darstellung für $-(M + N)$!

Zahlendarstellung

Überlauf Bedingungen:

$$\begin{array}{r} 5 \qquad \quad 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \quad \quad 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 3 \qquad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline -8 \qquad \quad 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Überlauf

$$\begin{array}{r} -7 \qquad \quad 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline -2 \qquad \quad 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ \hline 7 \qquad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

Überlauf

$$\begin{array}{r} 5 \qquad \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \quad \quad 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 2 \qquad \quad 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \hline 7 \qquad \quad 0 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Kein Überlauf

$$\begin{array}{r} -3 \qquad \quad 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \quad \quad 1 \ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline -5 \qquad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline -8 \qquad \quad 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline \end{array}$$

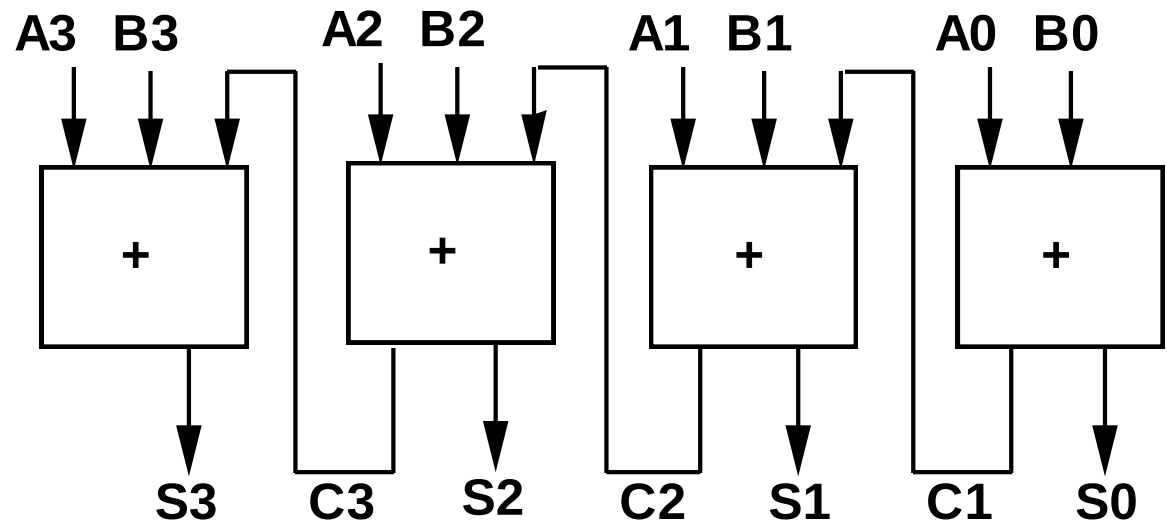
Kein Überlauf

Überlauf, wenn Carry-In ungleich Carry-Out!!!

Schaltungen für binäre Addition

Voll-Addierer

**Geschachtelter
Multi-bit
Addierer**



Allgemein: Addition von mehr als zwei Bits notwendig
→ Volladdierer wird benötigt