Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Mathematische Grundlagen - Relationen -

Relationen

Was sind Relationen?

- **Relationen** verallgemeinern die Prinzipien von **Vorschriften** wie $x < y$ oder $A \subseteq B$ und stellen sie auf eine **formale Grundlage**

- **zweistellige Relation** zwischen zwei Mengen X und Y:
  - Vorschrift α für beliebige Elemente **$x \in X$** und **$y \in Y$**
  - setzt fest, ob **x in Beziehung α zu y** steht

- Steht x in der Beziehung α zu y,
  so schreibt man: $x \, \alpha \, y$
  sonst: $x \, \overline{\alpha} \, y$

- Gilt X = Y
  → so spricht man von einer **Relation auf** oder **in einer Menge**

Relationen

Karlsruhe Institute of Technology

Eigenschaften von Relationen

- Bei **zweistelligen Relationen** auf einer Menge interessiert man sich für einige **spezielle Eigenschaften**

Reflexivität

- wenn **$x \alpha x$** für beliebige x gilt, so ist die **Relation α reflexiv**

Beispiel:

- **‚=‘** ist eine **reflexive Relation**, da $x = x$ immer gilt
- **‚$\leq$‘** ist **reflexiv** auf den reellen Zahlen, da $x \leq x$ für alle x gilt
- **‚ $\subseteq$‘** ist **reflexiv**, da jede Menge Untermenge von sich selbst ist

Eigenschaften von Relationen

Symmetrie

- Wenn aus $x \alpha y$ auch $y \alpha x$ folgt

  → so ist die **Relation α symmetrisch**

Beispiele:

- **‚=‘** ist **symmetrisch**
- Die Relation **„ist Freund von“** ist meist **symmetrisch**

Eigenschaften von Relationen

Antisymmetrie

- Wenn aus **$x \alpha y$** und **$y \alpha x$** folgt, dass **$x = y$** ist
  → so ist α **antisymmetrisch**
- Antisymmetrie ist **nicht** das Gegenteil von Symmetrie

Beispiele:

- **‚=‘** ist sowohl **symmetrisch** als auch **antisymmetrisch**!
- **‚<‘** ist **antisymmetrisch**
- **‚≥‘** ist **antisymmetrisch**

Eigenschaften von Relationen

Transitivität

- Wenn aus **x α y** und **y α z** folgt, dass **x α z** gilt
  → so ist α **transitiv**

Beispiele:

- **‚=‘** ist **transitiv**
- **‚<‘** ist **transitiv**
- **‚⊆‘** ist **transitiv**
- Die Relation **„ist älter als“** ist **transitiv**

Relationen

Typen von Relationen

- Anhand der vorgestellten Eigenschaften können Relationen bestimmten Typen zugeordnet werden

Ordnungsrelation

- Eine **Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - reflexiv
  - antisymmetrisch
  - Transitiv

Beispiele:

- **‚=‘** ist **Ordnungsrelation**
- **‚≤‘** ist **Ordnungsrelation**
- Die Relation **„ist mindestens so alt wie“** ist **Ordnungsrelation**

Relationen

Strenge Ordnungsrelation

- Eine **strenge Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **antireflexiv** (x α x gilt für kein x)
  - **antisymmetrisch**
  - **transitiv**

- Die meisten Relationen, die man auch instinktiv als ordnend bezeichnen würde sind entweder eine Ordnungsrelation oder eine strenge Ordnungsrelation

Beispiele:

- **‚<'** ist eine **strenge Ordnungsrelation**
- Die Relation **„ist schneller als"** ist eine **strenge Ordnungsrelation**

Relationen

Äquivalenzrelation

- Eine **Äquivalenzrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **reflexiv**
  - **symmetrisch**
  - **transitiv**

- Als Zeichen für **‚α'** wird bei **Äquivalenzrelationen ‚≡'** verwendet
- Teilt die Elemente in **disjunkte Teilmengen** auf → **Äquivalenzklassen**

Beispiele:

- **‚='** ist selbstverständlich eine **Äquivalenzrelation**
- **„x α y ⇔ |x| = |y|"** ist für **Vektoren** eine **Äquivalenzrelation**

Relationen

Verträglichkeitsrelation

- Eine **Verträglichkeitsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
  - **reflexiv**
  - **symmetrisch**
  - **nicht transitiv**

- Als Zeichen für **‚α'** wird bei **Verträglichkeitsrelationen** häufig **‚~'** verwendet

Beispiele:

- Relation für Menschen **„verträgt sich mit"** ist **Verträglichkeitsrelation**
- **Verträglichkeitsrelationen** treten bei Problemen auf, bei denen bestimmte Paarungen ausgeschlossen sind

  → z.B.: **"zwei Leitungen führen zur gleichen Zeit ein Signal"**

Relationen

Überdeckungsproblem

- Ein häufig auftretendes Grundproblem ist das sogenannte **Überdeckungsproblem**

- **Beispiel:**
  - “wie viele Partys man **mindestens** feiern muss,
    um alle Freunde so einzuladen, dass keine zwei Freunde,
    die sich nicht vertragen, zur gleichen Party eingeladen werden“

- Die Grundlage des Problems:
  → eine **Verträglichkeitsrelation**

Überdeckungsproblem

Problemstellung

- Es sei **M** die **Menge der Freunde f_i**
  - **$M = \{ f_i \mid f_i \text{ ist Freund} \}$**

- Gesucht sind Gästelisten (Teilmengen **G_j**)
  → nur **Freunde (f_i)** enthalten, für welche **paarweise** die **Verträglichkeitsrelation** erfüllt ist
  → **für alle $f_k, f_m \in G_j$** gilt: **$f_k \,\alpha\, f_m$**

- Eine **Menge τ** von solchen **Partys (G_j)** wird **Überdeckung** von **M** genannt, wenn **jeder Freund (f_i)** in einer **Gästeliste ($G_j \in \tau$) enthalten** ist
  - **$\tau = \{ G_{j1}, G_{j2}, \ldots, G_{jn} \}$**
  - $\forall \quad f_i \in M \quad \text{gilt} \quad \rightarrow \quad \exists \quad G_j \in \tau \quad \text{mit} \quad f_i \in G_j$

Überdeckungsproblem

Beispiel:

- **Gäste:**

  $M = \{ a, b, c, d, e \}$

- **Verträglichkeit:**

  $a\,\overline{\alpha}\,c \qquad b\,\overline{\alpha}\,c \qquad a\,\overline{\alpha}\,e$

- **Gästelisten:**

  $G_1 = \{ a, b \}$

  $G_2 = \{ c, e, d \}$

  $G_3 = \{ b, d, e \}$

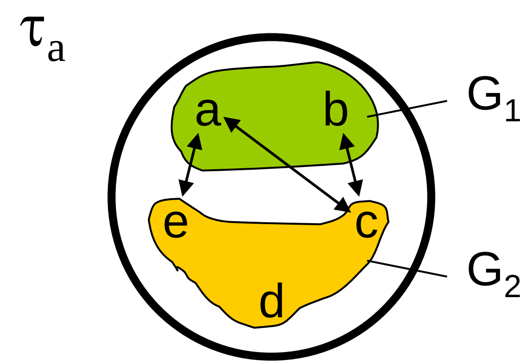
  $G_4 = \{ a \}$

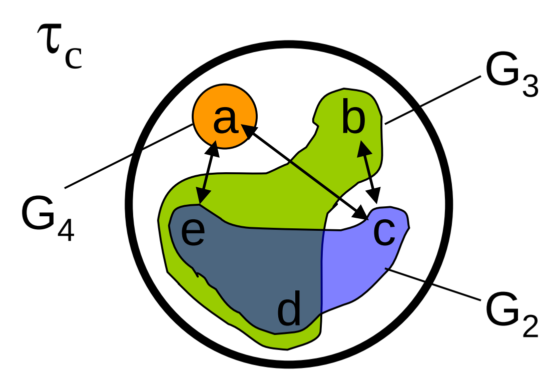
- **Überdeckungen:**

  $\tau_a = \{ G_1, G_2 \}$ ist **Überdeckung**

  $\tau_b = \{ G_2, G_3 \}$ ist keine Überdeckung

  $\tau_c = \{ G_2, G_3, G_4 \}$ ist **Überdeckung**





Überdeckungsproblem

Überdeckungsrelation

- bestimmtes **Element f_i** von einer **Teilmenge G_j überdeckt**
  → eine **Relation** zwischen der Menge der **Elemente** aus **M**
  und der Menge der **Teilmengen τ**

- Diese Relation wird **Überdeckungsrelation** genannt

- Sie wird zweckmäßigerweise als **„τ x M“-Matrix** dargestellt

Struktur der Überdeckungstabelle:

Überdeckende Mengen Î t	Überdeckte Größen Î M			
	f_1	f_2	...	f_j
G_1 G_2 ...				
G_j				ist f_j Î G_j ?

Überdeckungsrelation

Überdeckungstabellen des Beispiels:

τ_a	a	b	c	d	e
G_1	X	X			
G_2			X	X	X

τ_c	a	b	c	d	e
G_2			X	X	X
G_3		X		X	X
G_4	X				

- **τ_b ist keine Überdeckung, da ‚a' von keiner Teilmenge überdeckt wird**

τ_b	a	b	c	d	e
G_2			X	X	X
G_3		X		X	X