

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

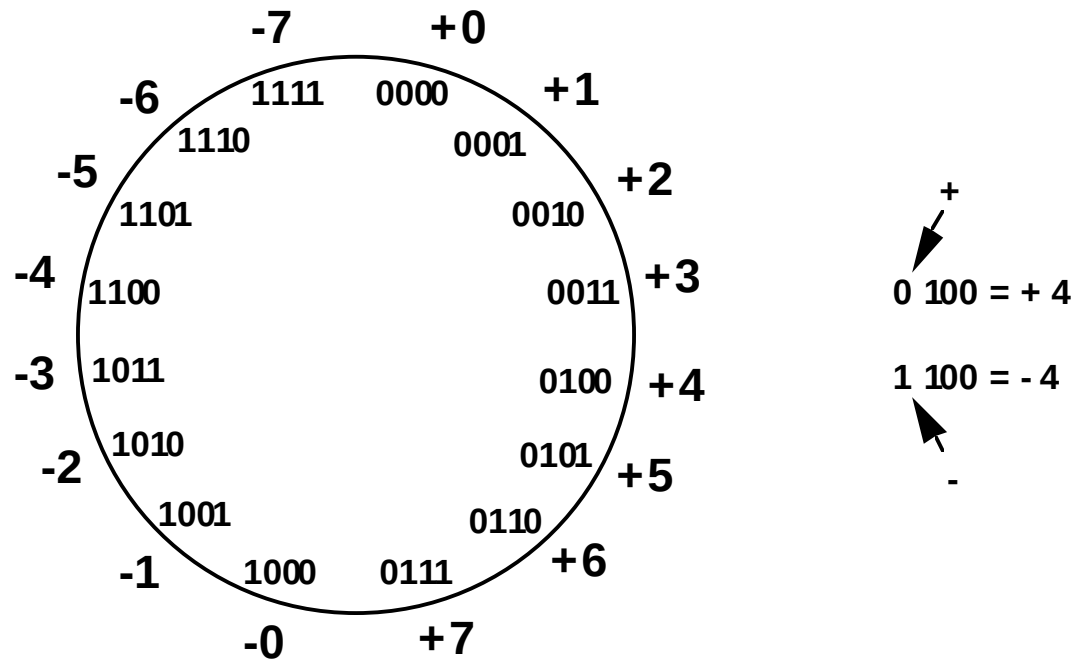
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Zahlendarstellung und Komplement

Betrags- und Vorzeichendarstellung



- Höchstes Bit ist **Vorzeichen**: 0 = **positiv** (oder NULL), 1 = **negativ**
- Die restlichen Bits der **Betrag**: 0 (000) bis 7 (111)
- Zahlenbereich für n Bits = +/- 2
- Darstellung der Null: 0000 und 1000

Schwierigkeiten bei Betrags- und Vorzeichendarstellung:

- Schwerfällige Addition/Subtraktion
- Vergleich der Beträge nötig zur Bestimmung des Vorzeichens vom Ergebnis

Abhilfe durch 1er Komplement

- N ist positive Zahl, dann ist $\overline{N}$ zugehöriges negatives 1er Komplement

$$\overline{N} = (2^n - 1) - N$$

Bsp.: 1er Komplement von 7

$$2^4 = 10000$$

$$-1 = \underline{00001}$$

$$1111$$

$$-7 = \underline{0111}$$

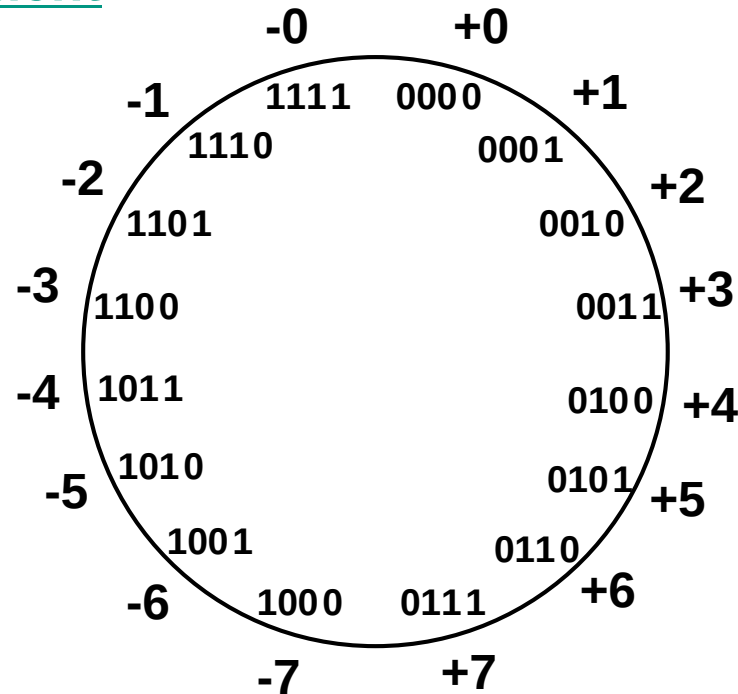
$$1000 = -7 \text{ in 1er Komp.}$$

- Schnelle Methode:

- Komplement einfach **bitweises** berechnen:

$$0111 \rightarrow 1000$$

1er Komplement

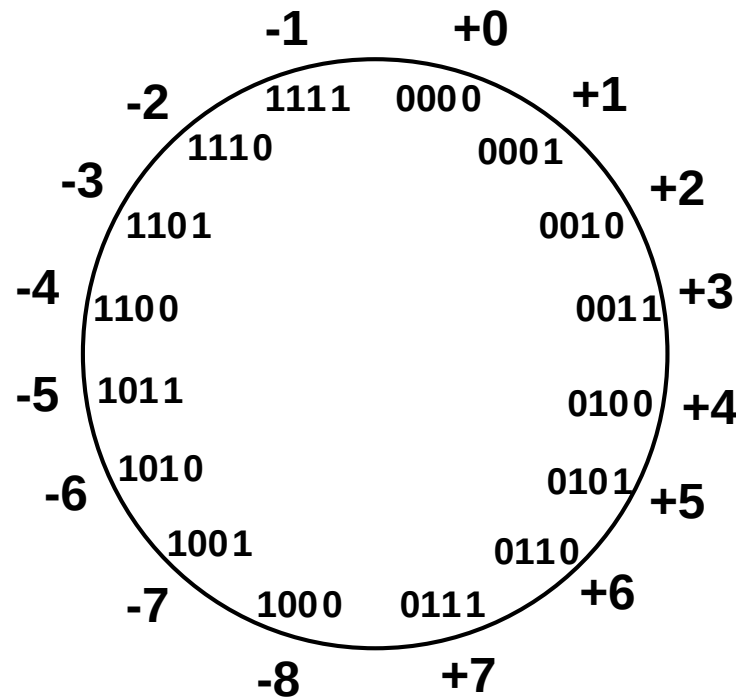


$0\ 100 = +4$
 $1\ 011 = -4$

- Subtraktion realisiert durch Addition und 1er Komplement
- **Zwei** Darstellungen der **Null**: Macht Probleme !!!
- **Addition ist nicht einfach** durchzuführen !!!

2er Komplement (K2)

*wie 1er Kompl.,
zusätzlich jedoch
um eine Position
im Gegenuhr-
zeigersinn
verschoben*



$\begin{matrix} + \\ \swarrow \\ 0 \ 100 = +4 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \searrow \\ 1 \ 100 = -4 \\ - \end{matrix}$

- Nur eine Darstellung der Null
- Eine negative Zahl mehr als positive

2er Komplement (K2) Zahlen

$$N^* = 2^n - N$$

$$2^4 = 10000$$

Bsp.: 2er Komplement von 7

$$\text{sub } 7 = \underline{0111}$$

1001 = -7 im 2er Kompl.

$$2^4 = 10000$$

Bsp.: 2er Komplement von -7

$$\text{sub } -7 = \underline{1001}$$

0111 = 7 im 2er Kompl.

■ Schnelle Methode:

■ 2er Komplement = Bitweises Komplement + 1

0111 $\rightarrow$ 1000 + 1 $\rightarrow$ 1001 (Darstellung von -7)

1001 $\rightarrow$ 0110 + 1 $\rightarrow$ 0111 (Darstellung von 7)

Addition und Subtraktion

■ Vorzeichen und Betrag

Ergebnisvorzeichenbit
entspricht den
Vorzeichenbits der
Operanden

$$\begin{array}{r} 4 \quad 0100 \\ + 3 \quad 0011 \\ \hline 7 \quad 0111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 1100 \\ + (-3) \quad 1011 \\ \hline -7 \quad 1111 \end{array}$$

Unterscheiden sich
die Vorzeichen, hängt
das Ergebnis von
den Beträgen der
Operanden ab

$$\begin{array}{r} 4 \quad 0100 \\ - 3 \quad 1011 \\ \hline 1 \quad 0001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 1100 \\ + 3 \quad 0011 \\ \hline -1 \quad 1001 \end{array}$$

Addition und Subtraktion von binären Zahlen

■ 2er Komplement Berechnungen

Wenn **Carry-in = Carry-out**
dann ignoriere Carry!

4	0100	-4	1100
<u>+ 3</u>	<u>0011</u>	<u>+ (-3)</u>	<u>1101</u>
7	0111	-7	11001

Wenn **Carry-in ≠ Carry-out**
dann Überlauf!

4	0100	-4	1100
<u>- 3</u>	<u>1101</u>	<u>+ 3</u>	<u>0011</u>
1	10001	-1	1111

- Einfaches Vorgehen bei der Addition macht die **2er-Komplement-Darstellung** zur **ersten Wahl** für Integer-Berechnung in digitalen Systemen

Addition und Subtraktion von binären Zahlen im 2er Komplement

■ Warum kann Carry-Out ignoriert werden?

- $-M + N$ wenn $N > M$:

$$M^* + N = (2^n - M) + N = 2^n + (N - M)$$

Ignorieren des Carry-out ist wie Subtraktion von 2^n

- $-M + -N$ wobei $N + M < \text{oder} = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} -M + -N &= M^* + N^* = (2^n - M) + (2^n - N) \\ &= 2^n - (M + N) + 2^n \end{aligned}$$

- Nach dem Ignorieren des Carry die richtige K2-Darstellung für $-(M + N)$!

Überlauf Bedingungen:

$$\begin{array}{r} 5 \qquad \textcolor{red}{0\ 1\ 1\ 1} \\ \quad \quad 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \textcolor{red}{3} \quad \quad \textcolor{red}{0\ 0\ 1\ 1} \\ \hline -8 \qquad \quad 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \text{Überlauf} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \qquad \textcolor{red}{0\ 0\ 0\ 0} \\ \quad \quad 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \textcolor{red}{2} \quad \quad \textcolor{red}{0\ 0\ 1\ 0} \\ \hline 7 \qquad \quad 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \text{Kein Überlauf} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -7 \qquad \textcolor{red}{1\ 0\ 0\ 0} \\ \quad \quad 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline \textcolor{red}{-2} \quad \quad \textcolor{red}{1\ 1\ 1\ 0} \\ \hline 7 \qquad \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \text{Überlauf} \end{array}$$

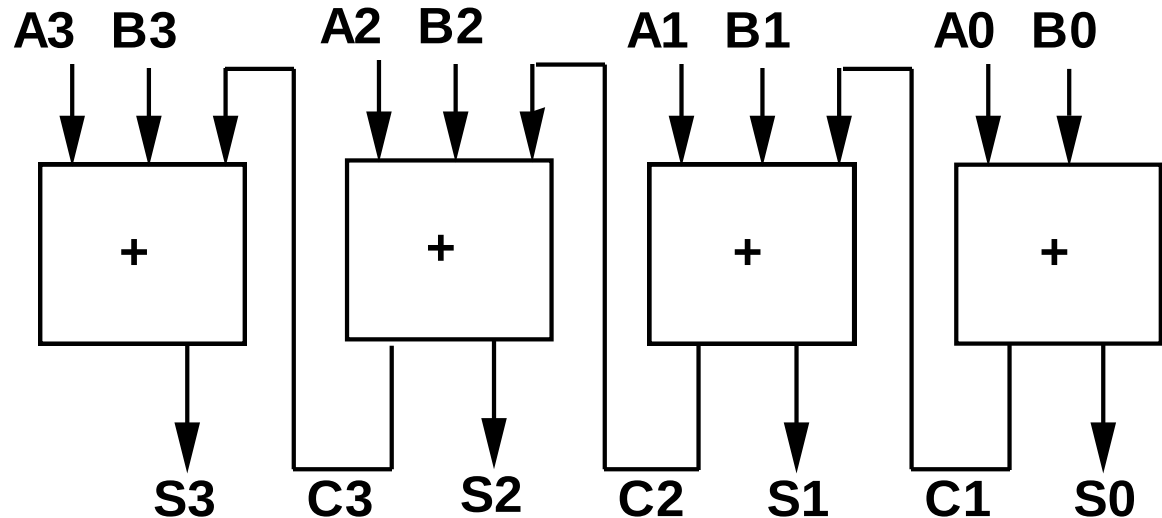
$$\begin{array}{r} -3 \qquad \textcolor{red}{1\ 1\ 1\ 1} \\ \quad \quad 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline \textcolor{red}{-5} \quad \quad \textcolor{red}{1\ 0\ 1\ 1} \\ \hline -8 \qquad \quad 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline \text{Kein Überlauf} \end{array}$$

Überlauf, wenn Carry-In $\neq$ Carry-Out!!!

Schaltungen für binäre Addition

Voll-Addierer:

- Geschachtelter Multi-bit Addierer



- Allgemein: Addition von mehr als zwei Bits notwendig
→ Volladdierer wird benötigt