

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

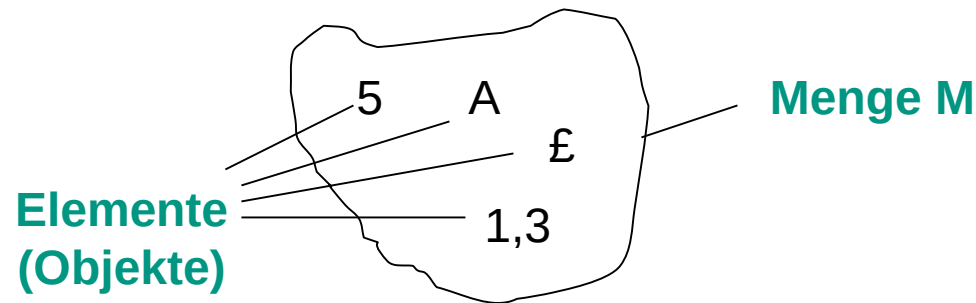
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Mathematische Grundlagen - Mengen -

- Eine **Menge M** ist die Zusammenfassung von **endlich** oder **unendlich** vielen **Objekten**
- Die **Objekte** müssen **unterscheidbar** sein
- Da Mengen auch unendlich viele Objekte enthalten können, werden sie manchmal auch als umrandete Gebiete gezeichnet

Beispiel:



Aussagen über Mengen

- $w \in M$ bedeutet, dass w in der Menge M enthalten ist
- $2,5 \notin M$ sagt aus, dass kein Element der Menge gleich 2,5 ist

Angabe der Elemente

- **Endliche Mengen** können durch Angabe der Elemente definiert werden:

$$M_1 = \{ c, d, f \}$$

$$M_2 = \{ 5, 2, 9 \}$$

- Platzsparende Angabe für **einfache Folgen**:

$$M_3 = \{ 1, 2, 3, \dots, 100 \}$$

- Um Mehrdeutigkeiten aus dem Weg zu gehen, gibt es **unterschiedlichste Schreibweisen**

$$M_4 = \{ 0,1 / 0,2 / 0,5 / 0,7 \}$$

Definition von Mengen

Angabe durch Konstruktionsvorschrift und Bedingungen

Allgemein:

$$M = \{ \text{Vorschrift} \mid \text{Bedingungen} \}$$

Beispiele:

■ Endliche oder abzählbare Mengen

$$M_1 = \{ x \mid x^2 + 3x + 1 = 0 \}$$

$$M_2 = \{ 2x + 1 \mid x \text{ ganzzahlig, } x > 0, x < 100 \}$$

■ Abzählbar unendliche Mengen

$$\mathbb{N} = \{ x \mid x \text{ ganzzahlig, } x > 0 \}$$

■ Überabzählbar unendliche Mengen

$$M_3 = \{ x \mid x \text{ ist reelle Zahl, } x > 0 \}$$

Vergleich:

- **Zwei Mengen** sind genau dann **gleich**, wenn sie die **gleichen Elemente** enthalten

Beispiel:

$$\{ 1, 3, 8, 11 \} = \{ 3, 11, 1, 8 \}$$

$$\{ 2x - 1 \mid x \text{ ganze Zahl} \} = \{ 2x + 1 \mid x \text{ ganze Zahl} \}$$

$$\{ x \mid x^2 = 1 \} = \{ 1, -1 \}$$

Mächtigkeit der Menge:

- Die Anzahl der Elemente einer Menge wird als **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** bezeichnet

Beispiele:

$$M = \{ x, y, z \}$$

$$|M| = 3$$

$$L = \{ x \mid x^2 - 2x = 5 \}$$

$$|L| = 2$$

Leere Menge:

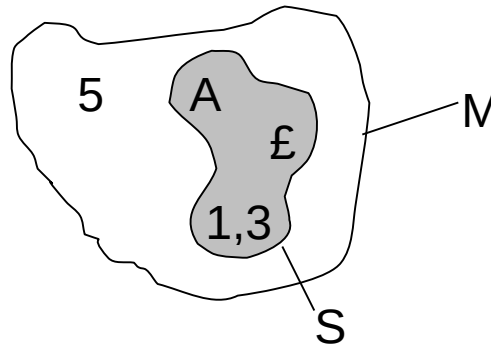
- Die Menge, die kein Element besitzt, wird **leere Menge** genannt

$$\emptyset = \{ x \mid x + 2 = x \} = \{ \}$$

$$|\emptyset| = 0$$

Untermenge:

- Eine **Menge S** heißt **Untermenge** oder **Teilmenge** von M genau dann, wenn **jedes Element von S zu M** gehört



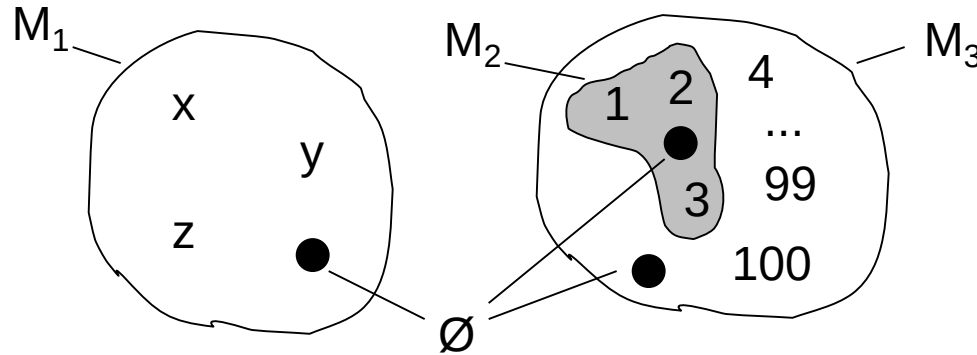
- Man schreibt:

$$S \subseteq M$$

- Falls **S ungleich M** ist, so sagt man: „S ist echte Untermenge von M“ und schreibt:

$$S \subset M$$

Beispiele:



$$M_2 \subseteq M_3$$

$$\emptyset \subseteq M_1$$

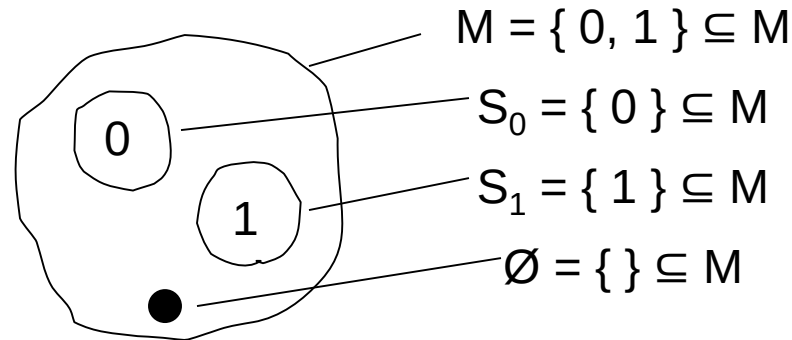
$$\emptyset \subseteq M_3$$

$$\emptyset \subseteq M_2$$

- Die **leere Menge** ist Untermenge jeder beliebigen Menge

Potenzmenge:

- Die Menge aller Untermengen einer Menge M heißt **Potenzmenge P** von M :



$$M = \{0, 1\}$$

$$|M| = 2$$

$$P(M) = \{\emptyset, S_0, S_1, M\} = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$|P(M)| = 2^{|M|} = 4$$

- Achtung** bei der leeren Menge:

$$|\emptyset| = 0$$

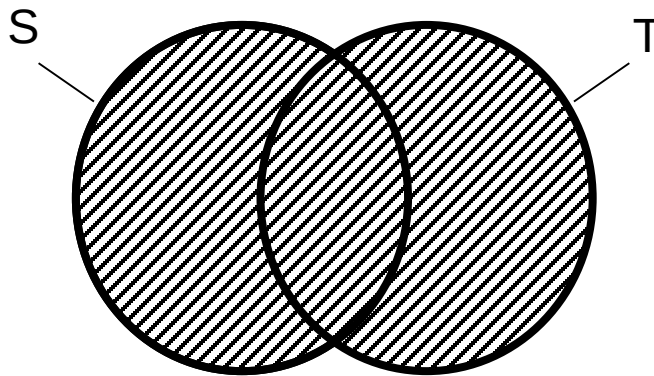
$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$|P(\emptyset)| = 1$$

Vereinigung:

- Die **Vereinigung** zweier **Mengen S und T** ist die Menge aller Elemente x, die **mindestens** einer der Mengen S und T angehören:

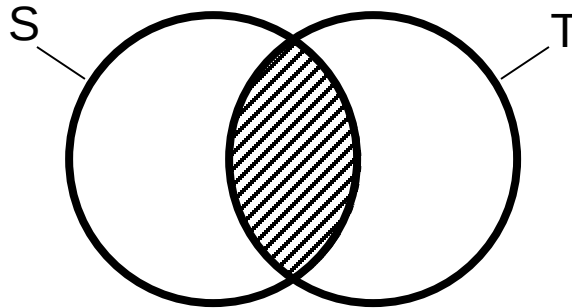
$$V = S \cup T = \{ x \mid x \in S \text{ oder } x \in T \}$$



Durchschnitt:

- Der **Durchschnitt zweier Mengen S und T** ist die Menge aller Elemente x, die **sowohl der Menge S als auch der Menge T** angehören:

$$V = S \cap T = \{ x \mid x \in S \text{ und } x \in T \}$$



Durchschnitt:

■ Für den **Durchschnitt** gilt allgemein:

$$\emptyset \subseteq S \cap T \subseteq S \subseteq S \cup T$$

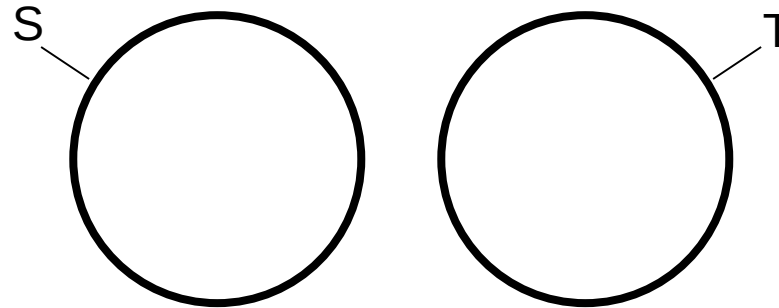
$$\emptyset \subseteq S \cap T \subseteq T \subseteq S \cup T$$

$$0 \leq |S \cap T| \leq |S| \leq |S \cup T|$$

$$0 \leq |S \cap T| \leq |T| \leq |S \cup T|$$

Disjunkte Mengen:

- gibt es **kein Element x**, das sowohl **zur Menge S** als auch **zur Menge T** gehört, so heißen **S** und **T disjunkt** oder **elementefremd**



- In diesem Fall gilt:

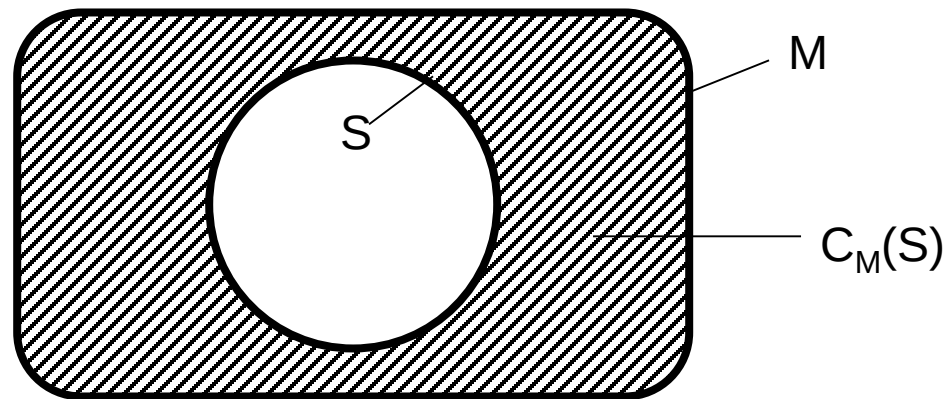
$$S \cap T = \emptyset$$

$$|S \cap T| = 0$$

$$|S \cup T| = |S| + |T|$$

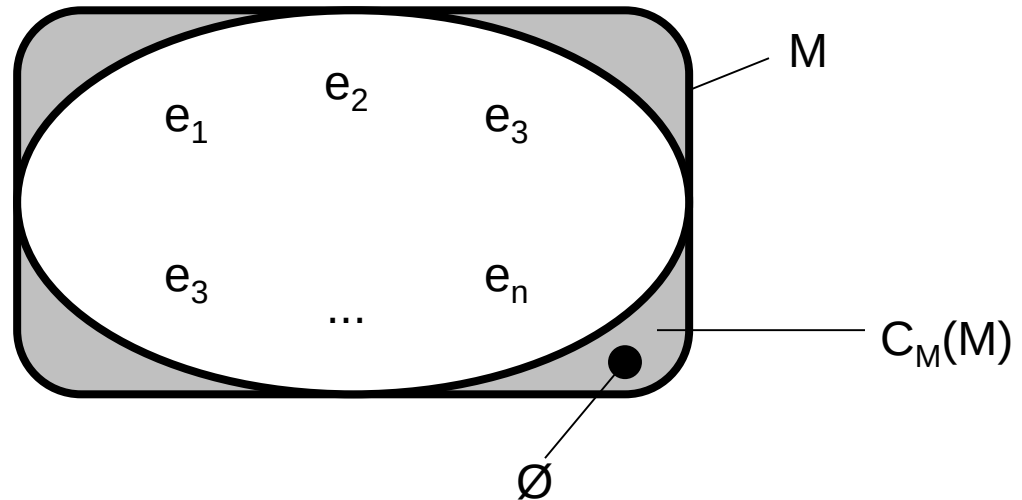
Komplement:

- Sei $S \subseteq M$
- Dann heißt die Menge aller Elemente von M , die nicht zu S gehören, das **Komplement von S bezüglich M**
- Man schreibt: $C_M(S)$
- Die Menge M wird in diesem Zusammenhang auch als **Bezugsmenge** bezeichnet

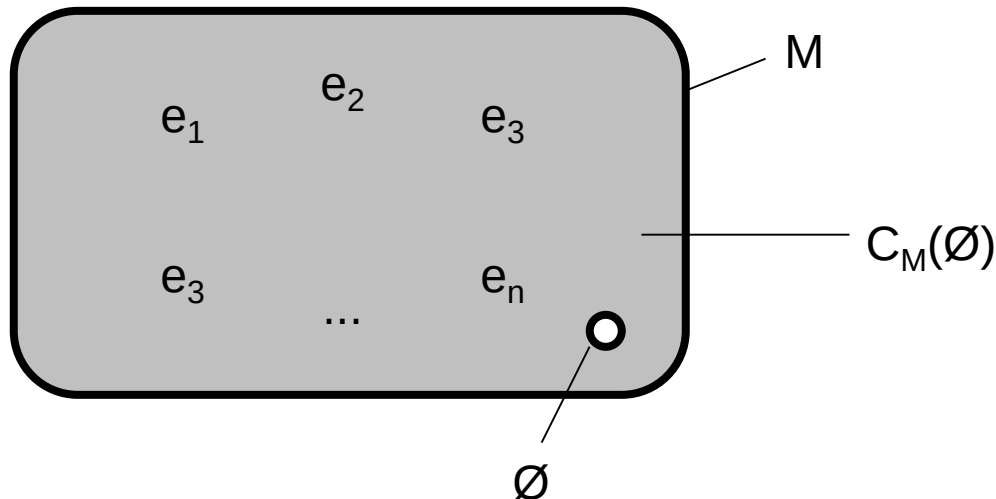


Grenzfälle der Komplementbildung:

$$C_M(M) = \emptyset$$



$$C_M(\emptyset) = M$$



Das kartesische Produkt:

- Unter dem **kartesischen Produkt $S \times T$** (gesprochen: „S kreuz T“) zweier **Mengen S und T** versteht man die Menge aller **geordneten Paare (s,t)** mit $s \in S$ und $t \in T$
- Das **kartesische Produkt** ist **nicht kommutativ** d.h. i.a.:

$$S \times T \neq T \times S$$

- Für die **Mächtigkeit** gilt:

$$|S \times T| = |S| \cdot |T|$$

Beispiel:

$$S = \{ 0, 1 \} \qquad T = \{ x, y, z \} \qquad |S| = 2 \qquad |T| = 3$$

$$S \times T = \{ (0,x), (0,y), (0,z), (1,x), (1,y), (1,z) \} \qquad |S \times T| = 2 \cdot 3 = 6$$

$$T \times S = \{ (x,0), (x,1), (y,0), (y,1), (z,0), (z,1) \} \qquad |T \times S| = 3 \cdot 2 = 6$$

Das kartesische Produkt:

- Das **n-fache kartesische Produkt S^n** der Menge S mit sich selbst ist die Menge aller **geordneten n-Tupel** $(r, s, \dots, z)$ mit $r \in S, s \in S, \dots, z \in S$

$$S^n = S \times S \times \dots \times S$$

$$|S^n| = |S|^n$$

Beispiel:

- $S = \{0, 1\}$

$$S^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$S^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl}\}$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x, y \text{ und } z \text{ sind reelle Zahlen}\}$$

$\Rightarrow$ kartesisches Koordinatensystem