

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Hamming Codes

Systematik: Code-Konstruktion zur Fehlererkennung / Fehlerkorrektur

■ Satz: $HD_{\min} \leftrightarrow$ Anzahl erkennbarer / korrigierbarer Fehler

a.) Sei $X \subseteq \{0, 1\}^n$ ein Code mit $HD_{\min}(X) = d$

→ dann sind bis zu $d - 1$ Fehler erkennbar !

b.) Sei $HD_{\min}(X) = d = 2e + 1$

→ dann sind bis zu $e = (d - 1) / 2$ Fehler korrigierbar !

Beweis:

Zu a.): $(d - 1)$ Fehler: kein gültiges Codewort in anderes Codewort überführbar

Zu b.): jedes empfangene Codewort CW_i mit höchstens e' ($\leq e$) Fehlern

unterscheidet sich vom gesendeten Codewort CW_j an höchstens e' Stellen,

d.h. von jedem anderen gültigen Codewort $CW_k \in X$ unterscheidet sich

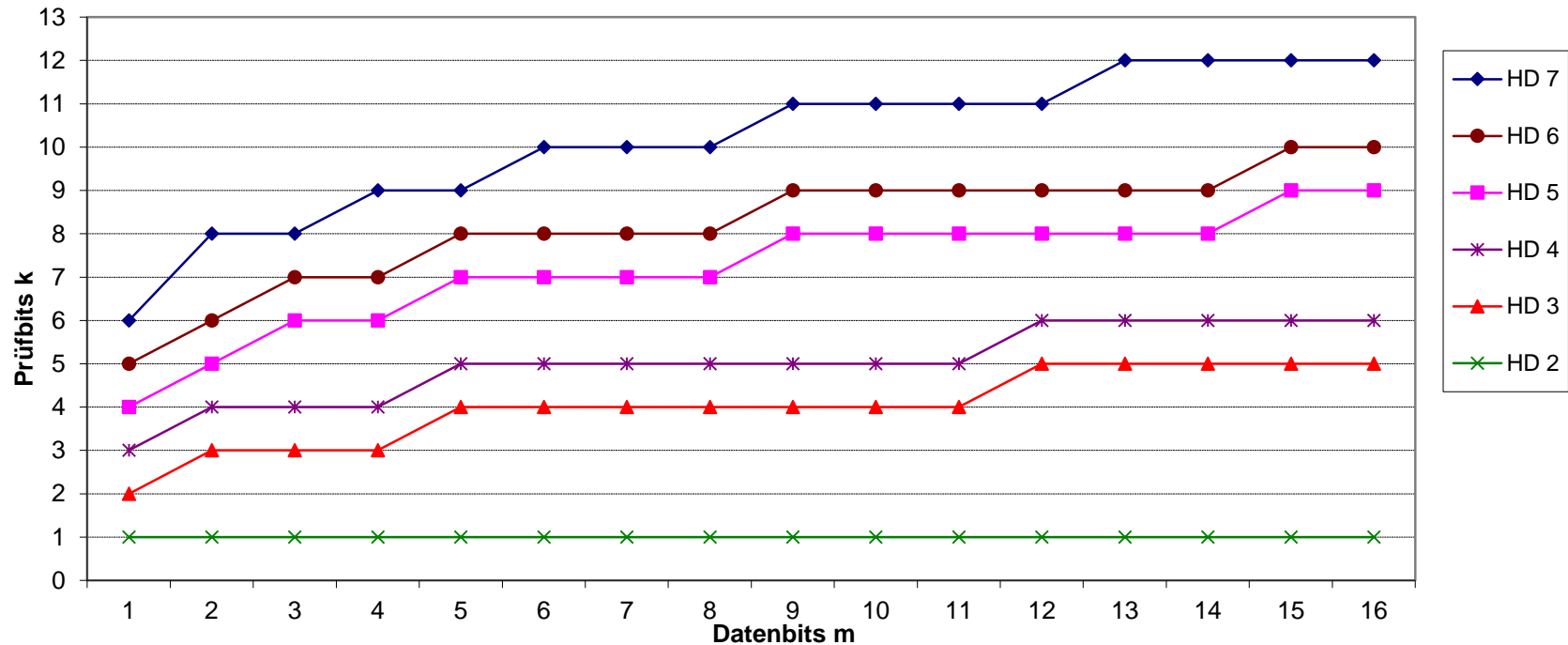
CW_i an mindestens $(2e + 1) - e' \geq 2e' + 1 - e' = e' + 1$ Binärstellen

also: $HD_{ik} \geq e' + 1$, d.h. das ursprünglich gesendete Codewort CW_j ist

eindeutig aus dem empfangenen (ggf. fehlerhaften) CW_i zuzuordnen!

Prüfbare und korrigierbare Codes:

→ Systematische Konstruktion



- Notwendige Anzahl von **Prüfstellen k** in Abhängigkeit von der Anzahl der **Informationsstellen m** um **minimale Hamming-Distanz $HD_{\min} = d$** zu erhalten
- Systematische **Codes** nach **Hamming**

Systematik: Konstruktion von Hamming-Codes

Zuordnung der geprüften Stellen zu den Prüfstellen:

Prüfstellen	der Prüfstelle zugeordnete Binärstelle	geprüfte Binärstellen
y_1	1	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...
y_2	2	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, ...
y_3	3	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, ...
y_4	4	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, ...
.
.	.	
.	.	

→ Zuordnung der geprüften Stellen zu den Prüfstellen:

i. Prüfstelle y_i überprüft **alle** Binärstellen (können Informationsstellen m als auch Prüfstellen k sein!), die in der **i. Stelle** (im **i. Bit**) der Dualzahlendarstellungen der entsprechenden **Binärstellenpositionen** (“duale Kennzahlen“) eine **“1“** aufweisen

Systematik: Konstruktion von Hamming-Codes

Aufbau eines 1-F-korrigierbaren Codes:

→ Einfachfehler sind korrigierbar: $HD_{\min} = 3$

1. Schritt	lfd. Nr. duale Kennzahl	1 001	2 010	3 011	4 100	5 101	6 110	7 111
2. Schritt	1. Stellenbelegung Bestimmung von y_1	y_1 0		x_1 0		x_2 1		x_3 1
3. Schritt	2. Stellenbelegung Bestimmung von y_2		y_2 1	x_1 0			x_4 0	x_3 1
4. Schritt	3. Stellenbelegung Bestimmung von y_3				y_3 0	x_2 1	x_4 0	x_3 1

→ Zuordnung der geprüften Stellen zu den Prüfstellen:

Beispiel: 1. Prüfstelle y_1 überprüft **alle** Binärstellen, die in der **1. Stelle** (im 1. Bit) der Dualzahlendarstellungen der entsprechenden Binärstellenpositionen ("duale Kennzahlen") eine "1" aufweisen

Beispiel:

1 F-korrigierbare Codes:

→ $m = 4$: Informationsstellen

→ $k = 3$: Prüfstellen

→ Zuordnung zu
Dezimalzahlen

→ **Beispiel: Konstruktion
der Prüfbits für 7. CW**

Codewort (CW)	x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	Dezimalzahl
1. CW	0	0	0	0	0	0	0	0
2. CW	0	0	0	1	0	1	1	1
3. CW	0	0	1	0	1	1	1	2
4. CW	0	0	1	1	1	0	0	3
5. CW	0	1	0	0	1	0	1	4
6. CW	0	1	0	1	1	1	0	5
7. CW	0	1	1	0	0	1	0	6
8. CW	0	1	1	1	0	0	1	7
9. CW	1	0	0	0	1	1	0	8
10. CW	1	0	0	1	1	0	1	9
11. CW	1	0	1	0	0	0	1	10
12. CW	1	0	1	1	0	1	0	11
13. CW	1	1	0	0	0	1	1	12
14. CW	1	1	0	1	0	0	0	13
15. CW	1	1	1	0	1	0	0	14
16. CW	1	1	1	1	1	1	1	15