Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Codierung und Fehlerkorrektur

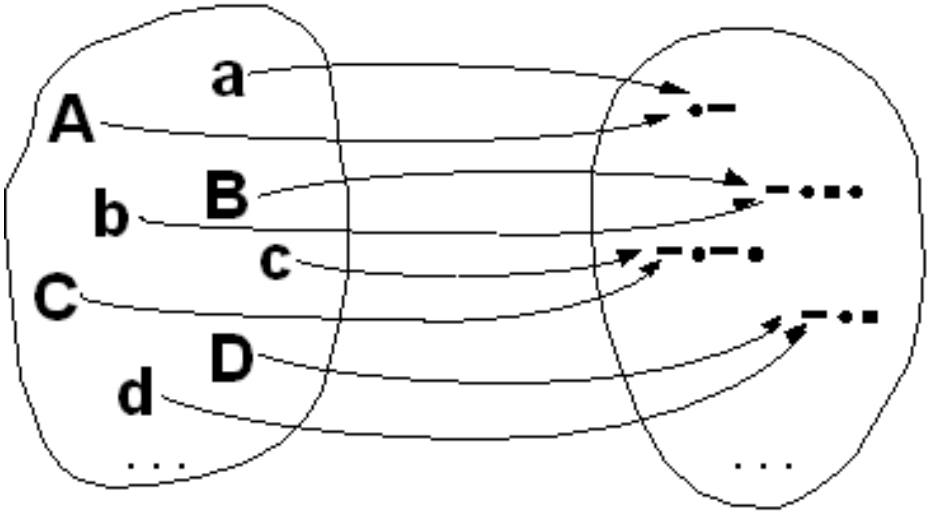
Codewörter

Allgemein: **Code** ist Vorschrift für **eindeutige Zuordnung** → **Codierung**

→ Zuordnung muss **nicht umkehrbar eindeutig** sein

Beispiel: **Zuordnung von Zeichen verschiedener Alphabete**

Zeichenvorrat (Urmenge) **anderer Zeichenvorrat (Bildmenge)**



- **Digitaltechnik:** **Abstraktion** der Werte “L“ und “H“ durch Symbole **“0“** und **“1“**

Codewörter

- **Codewörter** sind elementare Einheiten zur **Darstellung** von Informationen

Beispiel:

Codewort	Anzahl Binärstellen
10111010	m=8
10111	m=5

- **Anzahl** möglicher **Codewörter** mit ***m*** Binärstellen: 2^m
- Maximale **Anzahl** ***N*** von ***m***-stelligen **Codewörtern**: $N \leq 2^m$
- **Anzahl** strukturierter ***m***-stelliger **Codewörter** mit ***k*** Einsen: $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

Strukturierte Codes

Allgemein gilt: **Codes** legen fest, wie Codewörter zu **interpretieren** sind

Beispiel: **Strukturierter Code**

→ **Anzahl Wörter im (2 aus 5)-Code:** $N = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$

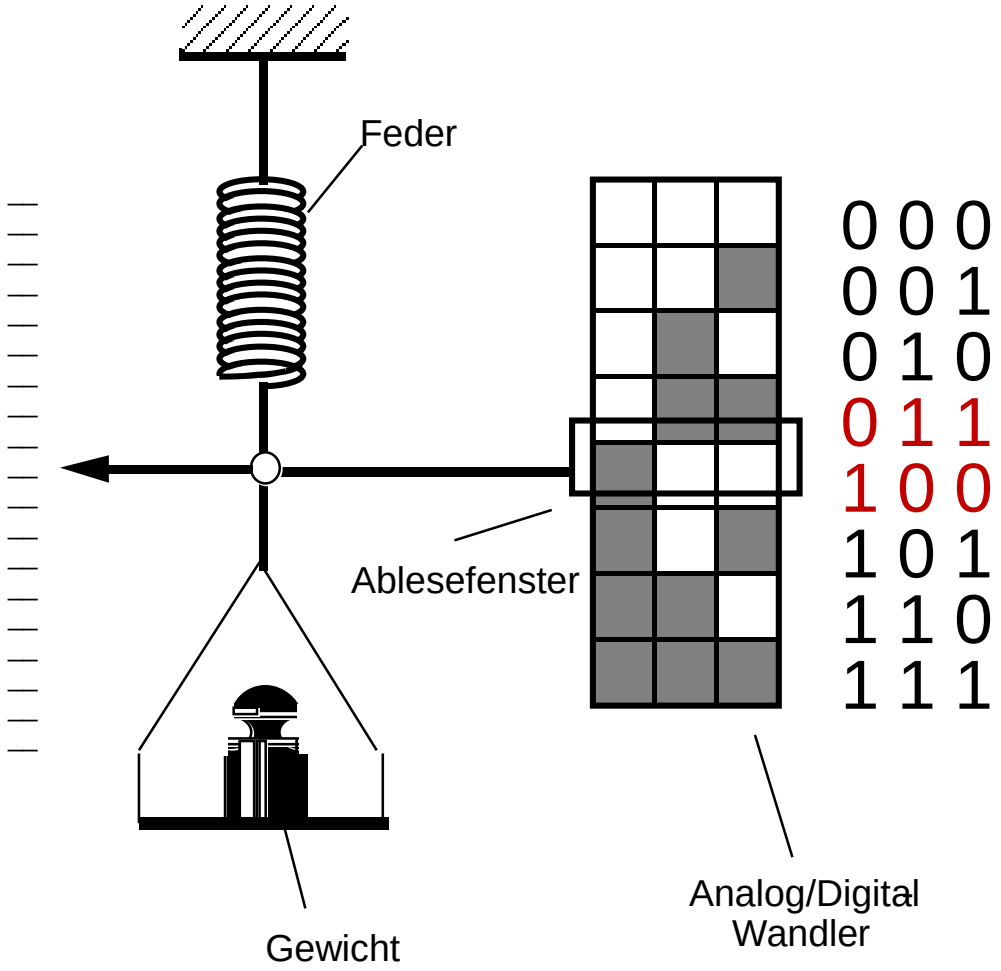
- **m = 5 k = 2**
- Folgende **Codewörter** sind möglich:

00011	00110	01010	10001	10100
00101	01001	01100	10010	11000

- Der **(2 aus 5)-Code** eignet sich mit seinen **10 Codewörtern** besonders zur Darstellung von **Dezimalziffern**

Codes für die Analog/Digital-Umsetzung

Wandlung von stetigen Signalen in zusammengesetzte Binärsignale



Aufgabe:

Festlegung einer geeigneten Zuordnung:

Stetiger Wertebereich

⇓

Binärer Wertebereich

Codes für die Analog/Digital-Umsetzung

Wandlung: **stetige (analoge) Signale in Binärsignale (Binärvektoren)**

- **Problem:** **Übergänge**, bei denen sich **mehr** als **eine Binärstelle** ändert
- **Beispiel:**

0 1 1
⇓ ⇓ ⇓
1 0 0

3 Binärstellen-übergänge

- Beim **Wechsel** müssen **nicht alle** Binärstellen **gleichzeitig** wechseln
- **Dadurch:** **große Abweichungen** für Werte der **Binärsignale** möglich:

0 1 1
⇓ ⇓ ⇓
111, 001, 010, 101, 110 oder 000
⇓ ⇓ ⇓
1 0 0

Fehlerhafte Übergänge in andere Codewörter möglich

Code-Eigenschaften: Hammingdistanz

Eigenschaften von/zwischen Codewörtern

- **Definition:** **Hammingdistanz HD** (auch **Hammingabstand** genannt)

  Seien die Codewörter CW_i, $CW_j \in \{0, 1\}^n$,
  HD_{ij} = Anzahl der **Stellen**, an denen sich CW_i und CW_j **unterscheiden**.
  Dann heißt **Hd_{ij}** die **Hammingdistanz** von CW_i und CW_j .

- **Also:** Die **Hammingdistanz HD** zwischen **zwei** gleich langen **Codewörtern** gibt die **Anzahl** der **unterschiedlichen Binärstellen** an.

Beispiele: Bestimmung HD

011	**100**	HD = 3
10**0**0	10**1**0	HD = 1
1100**0**	**001**0**1**	HD = 4

Code-Eigenschaften: Hammingdistanz

- **Definition:** **Minimale Hammingdistanz HD_{min}**

  Sei $X \subseteq \{0, 1\}^n$ beliebig, und
  $Hd_{min}(X) = \min\{ Hd_{ij} \mid CW_i , CW_j \in X \ \wedge \ CW_i \neq CW_j \}$
  Dann heißt **$Hd_{min}(X)$ minimale Hammingdistanz** von X

- **Beispiel:** Codewörter des **(2 aus 5)-Codes** haben folgende minimale Hammingdistanz: **$Hd_{min}(2 \text{ aus } 5) = 2$**

- Die **minimale Hammingdistanz** ist eine entscheidende Eigenschaft eines Codes, um **Übertragungsfehler erkennen** und **korrigieren** zu können

Begriff: **Einschrittige Codes**

- Codes, bei denen zwei **benachbarte Codewörter immer** eine **Hammingdistanz** von **eins** haben heißen **einschrittig**.

Spezielle Codes: Gray-Code

Code zur Analog/Digital-Wandlung

Einschrittige Codes: besondere Rolle bei der **Analog-Digital Wandlung**

Beispiel: Problem der digitalisierten Waageablesung

→ **Änderung einer Binärstelle** geschieht auf jeden Fall immer „**gleichzeitig**“

→ **Wandlungsfehler** von **höchstens 1** in kleinster Messeinheit

- Wichtiger Vertreter der **einschrittigen Codes**: **Gray-Code**

linear, m=4

0:	0000
1:	0001
2:	0011
3:	0010
4:	0110
5:	0111
6:	0101
7:	0100
8:	1100
9:	1101

zyklisch, m=3

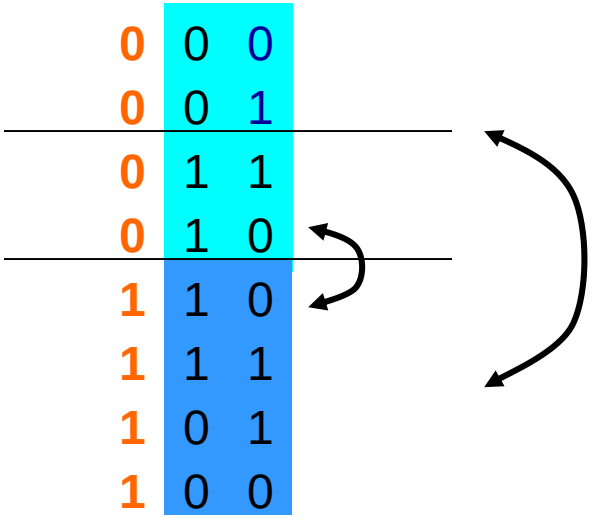
0:	000
1:	001
2:	011
3:	010
4:	110
5:	111
6:	101
7:	100
0:	000
	...

Spezielle Codes: Gray-Code

Konstruktion des Gray-Codes

- **Geg.: Gray-Code** mit **m = x** Binärstellen liegt vor

- Doppelt so langen **Gray-Code** mit $\mathbf{m_{neu} = x+1}$ Binärstellen erzeugen:
  - → in umgekehrter Reihenfolge an **gegebenen Code anhängen** (**Spiegelung** an der **Horizontalen**)
  - → und **zusätzliche Binärstelle** anfügen (zuerst $2^{x+1}/2$ Nullen/Einsen dann $2^{x+1}/2$ Einsen/Nullen)



Spezielle Codes: Austauschcodes

Notwendig: **Datenaustausch** zwischen **digitalen Systemen**:
-> spezielle Codes werden benötigt
-> **Texte** aus Buchstaben, Ziffern, Satzzeichen, Sonderzeichen (*characters*) **übertragbar**

ASCII-Code

- Verbreitung: **ASCII-Code** (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange)
  → kodiert mit **7 Bit 128 Zeichen**: reicht für englischen Sprachraum weitgehend aus

- **Bitgruppen** werden zusammengefasst -> spezielle Bedeutung / Namen:
  - **MSB** (**M**ost **S**ignificant **B**its) bezeichnet **3 höherwertigen** Bits
  - **LSB** (**L**east **S**ignificant **B**its) bezeichnet **4 niederwertigen** Bits

- **Zuordnung:** **Zeichen** <-> **Codewort**
  → **MSB** teilt alle Zeichen in **Gruppen** zu je **16 Zeichen** ein
  (**lexikographische** Anordnung von **Zeichen + Codewörtern**)

Spezielle Codes: ASCII-Code

LSB	MSB							
Binär	000	001	010	011	100	101	110	111
	Steuerzeichen				Großbuchstaben		Kleinbuchstaben	
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	„	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Spezielle Codes: Austauschcodes

Beispiel: **ASCII-Codierung**

- Buchstabe “A“:
  $A = 41_H = 100\ 0001_B$ (Bitgruppen analog zu Hexadezimalsystem / Kapitel 4.6)
  MSB LSB

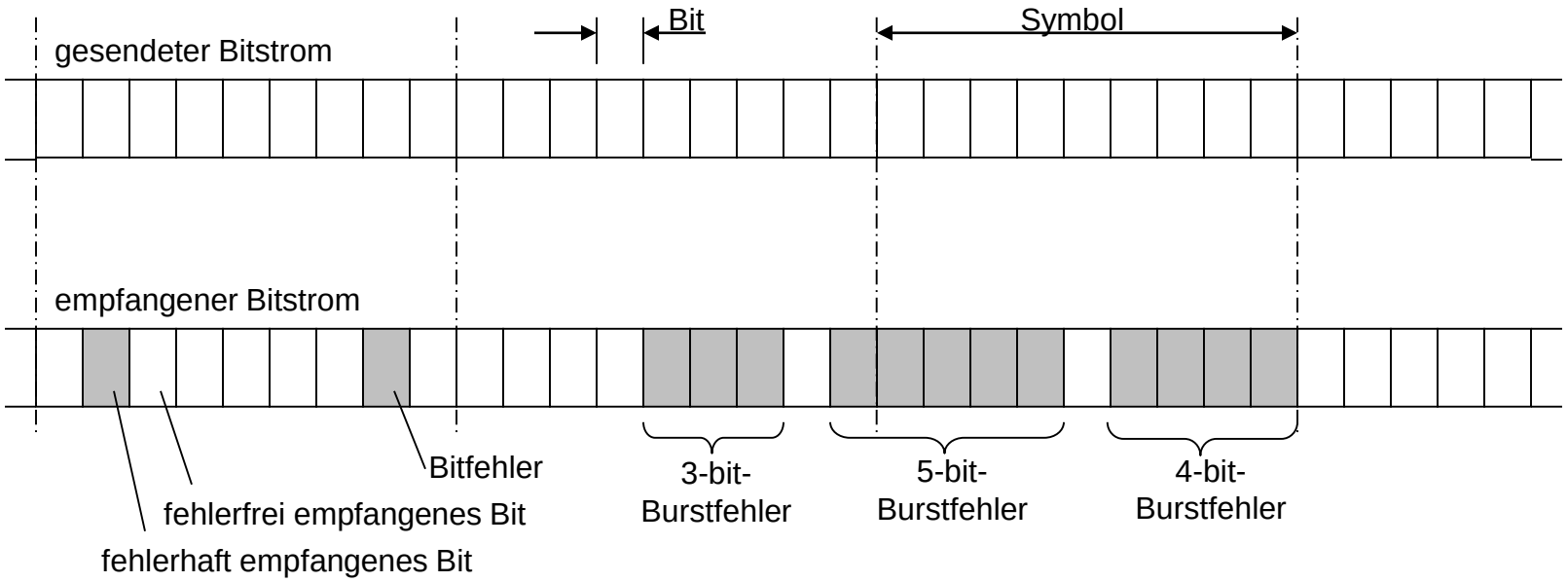
- **Praxis:** verschiedene 8, 16 und sogar 32 Bit Codes in Gebrauch
  → Spezialzeichen verschiedener Sprachen darstellbar

- **Weitere Beispiele:**
  - verbreitester **16-Bit Austauschcode** ist der ***UNICODE***
  → 65536 Zeichen darstellbar
  → ASCII-Code: erste 128 Zeichen des *UNICODES*
  → enthält Erweiterungen für viele Sprachen

  - **7-Segment-Code**: digitale Ziffernanzeige, etc.
  - **Punktmatrixanzeigen**: Drucker, etc.
  - **OCR-Code** (**O**ptical **C**haracter **R**ecognition):
  - **Blindenschrift**, etc.

Codes für Fehlererkennung / -korrektur

- Fehlerschutz umfasst **Fehlererkennung** und **Fehlerkorrektur**
- **Schutzwirkung** wird durch **Codierung** realisiert
- Unterscheidung abhängig von Lage und Menge fehlerhaft empfangener Bits:
  → **Bitfehler**, **Burstfehler** und **Symbolfehler**
  können innerhalb des übertragenen Bitstroms auftreten



Codes für Fehlererkennung

- **Problem in der Praxis:** **Störeinflüsse** können bei der **Übertragung** oder **Speicherung** von **binär kodierten** Informationen den Wert der zur Darstellung verwendeten physikalischen Grösse **verfälschen**

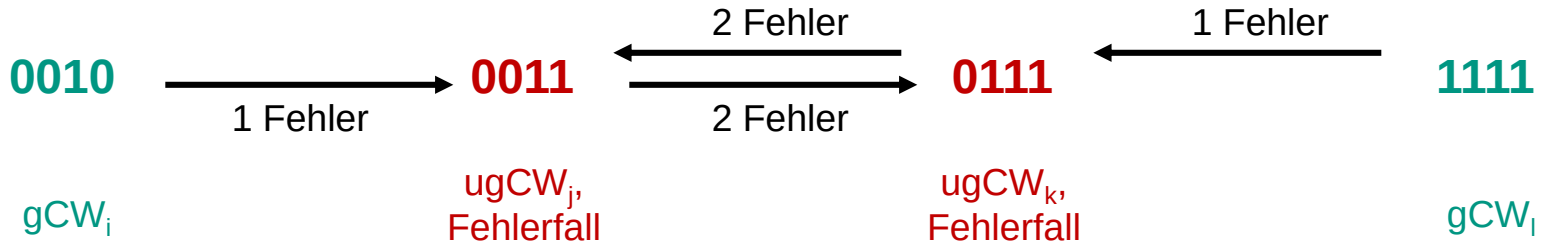
- **Es gilt:** **einzelne Bitfehler** (1 Bit „“kippt“) sind **erkennbar** bei Codes mit **minimaler Hammingdistanz** $\mathbf{HD_{min}} = 2$

  → jeder denkbare **Bitfehler** führt zu **ungültigem** (d.h. unbenutztem) **Codewort**:

Codes für Fehlererkennung / -korrektur

Es gilt: Bei **Codes** mit $\mathbf{HD_{min}} = \mathbf{3}$:
→ **Zweifachfehler erkennbar** oder **Einfachfehler korrigierbar**

2-Fach Fehlererkennung:



1-Fach Fehlerkorrektur:

Codes für Fehlererkennung / -korrektur

Allgemein gilt:

- **Geeignete Codes** können **Fehler erkennen** und sogar **korrigieren**
- **Notwendig:** Hinzufügen **zusätzlicher** (**redundanter**) **Informationen**

  → **zusätzlicher Darstellungsaufwand (Kosten!)**
- **Annahme:** Höchstanzahl **gleichzeitig** zu berücksichtigender **Fehler** ist fest

  meistens: höchstens **1** oder **2 Bitfehler** gleichzeitig
- **(Teil-)Systematik** bei Festlegung des **Codes** notwendig

  Möglichkeiten: **minimale Hammingdistanz**, **Paritätsbits**, **Blocksicherungsverfahren**, **Hamming-Codes**, **etc.**

Paritätsbit-Prüfverfahren:

- **Fehler** bei Code-Übertragung **erkennbar** (ohne Beachtung Hammingdistanz)
  → zusätzliches **Paritätsbit** anhängen:
  - im Binärwort **enthaltene Einsen** werden entweder auf **gerade** (***even parity***) oder **ungerade** (***odd parity***) Anzahl ergänzt → **Überprüfung beim Empfänger**

Fehlererkennung durch Parität

Beispiel: Ergänzung des Paritätsbit

Dezimal	Binär	gerade Parität	ungerade Parität
0	0000	0000 **0**	0000 **1**
1	0001	0001 **1**	0001 **0**
2	0010	0010 **1**	0010 **0**
3	0011	0011 **0**	0011 **1**
4	0100	0100 **1**	0100 **0**
5	0101	0101 **0**	0101 **1**
6	0110	0110 **0**	0110 **1**
7	0111	0111 **1**	0111 **0**
8	1000	1000 **1**	1000 **0**
9	1001	1001 **0**	1001 **1**
Fehler:	1001	10**1**1 **0**	10**1**1 **1**

Fehlerkorrektur durch Blocksicherung

- Das Prinzip der **Paritätssicherung** ist **zweidimensional** anwendbar
  → **Blocksicherungsverfahren** mit doppelter Quersummenergänzung

- **Nachricht** wird in **Blöcke** von ***n* Codewörtern mit Paritätsbit** eingeteilt
  zusätzlich: am Ende jedes Blocks ein **weiteres Codewort** einfügen
  → enthält alle **Paritätsbits** der **Spalten**

- **Also:** bei Auftreten von **Einfachfehlern** lassen sich **Spalte** und **Zeile** **eindeutig** ermitteln:
  → **Einfachfehler** sind damit **korrigierbar**
  → gleichzeitig sind noch **weitergehende** **Fehlererkennungsverfahren** möglich: **Bündelstörung** erkennbar

- **Bündelstörung**: zeitlich konzentrierte Fehler, d.h. über einen Zeitraum ist die Verbindung gestört, können erkannt bzw. behoben werden

Fehlerkorrektur durch Blocksicherung

Beispiel: **Fehlerlokalisierung durch Blocksicherungsverfahren**

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler
(ungerade Parität)

Spalte mit Fehler
(ungerade Parität)

Fehlerkorrektur durch Blocksicherung

- **Also:** **m Informationsbits** werden **k Fehlerschutzbits** als **Redundanz** angehängt und übertragen
- **Damit:** Vergrößerung des Datenstroms auf Länge **n = m + k**
- **Beispiel für Blocksicherung:** **zyklische Redundanzprüfung** [Cyclic Redundancy Check (CRC)]