Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Jürgen Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

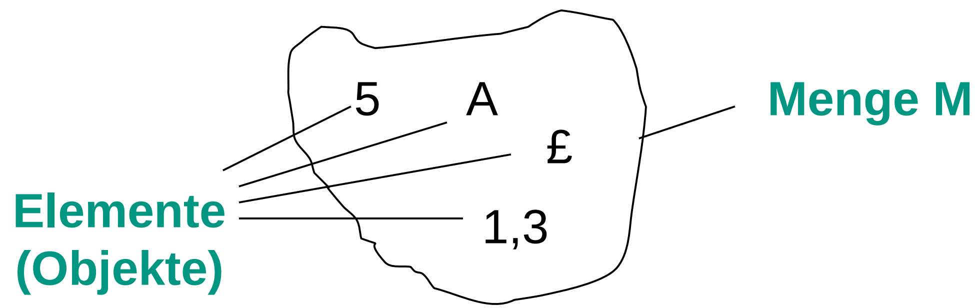
Mathematische Grundlagen
- Mengen -

Mengen

Karlsruhe Institute of Technology

- Eine **Menge M** ist die Zusammenfassung von **endlich** oder **unendlich** vielen **Objekten**
- Die **Objekte** müssen **unterscheidbar** sein
- Da Mengen auch unendlich viele Objekte enthalten können, werden sie manchmal auch als umrandete Gebiete gezeichnet

Beispiel:



Aussagen über Mengen

- $w \in M$ bedeutet, dass w in der Menge M enthalten ist
- $2{,}5 \notin M$ sagt aus, dass kein Element der Menge gleich 2,5 ist

Definition von Mengen

Angabe der Elemente

- **Endliche Mengen** können durch Angabe der Elemente definiert werden:

  $M_1 = \{ c,d,f \}$

  $M_2 = \{ 5,2,9 \}$

- Platzsparende Angabe für **einfache Folgen**:

  $M_3 = \{ 1,2,3,...,100 \}$

- Um Mehrdeutigkeiten aus dem Weg zu gehen, gibt es **unterschiedlichste Schreibweisen**

  $M_4 = \{ 0,1 \,/\, 0,2 \,/\, 0,5 \,/\, 0,7 \}$

Definition von Mengen

Angabe durch Konstruktionsvorschrift und Bedingungen

Allgemein:

$M = \{\ \textit{Vorschrift} \mid \textit{Bedingungen}\ \}$

Beispiele:

- **Endliche** oder **abzählbare** Mengen

  $M_1 = \{\ x \mid x^2 + 3x + 1 = 0\ \}$

  $M_2 = \{\ 2x + 1 \mid x \text{ ganzzahlig}, x > 0, x < 100\ \}$

- **Abzählbar unendliche** Mengen

  $\mathrm{IN} = \{\ x \mid x \text{ ganzzahlig}, x > 0\ \}$

- **Überabzählbar unendliche** Mengen

  $M_3 = \{\ x \mid x \text{ ist reelle Zahl}, x > 0\ \}$

Mengen

Vergleich:

- **Zwei Mengen** sind genau dann **gleich**, wenn sie die **gleichen Elemente** enthalten

Beispiel:

$$\{ 1, 3, 8, 11 \} = \{ 3, 11, 1, 8 \}$$

$$\{ 2x - 1 \mid x \text{ ganze Zahl} \} = \{ 2x + 1 \mid x \text{ ganze Zahl} \}$$

$$\{ x \mid x^2 = 1 \} = \{ 1, -1 \}$$

Mengen

Mächtigkeit der Menge:

- Die Anzahl der Elemente einer Menge wird als **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** bezeichnet

Beispiele:

$M = \{ x, y, z \}$ $\qquad |M| = 3$

$L = \{ x \mid x^2 - 2x = 5 \}$ $\qquad |L| = 2$

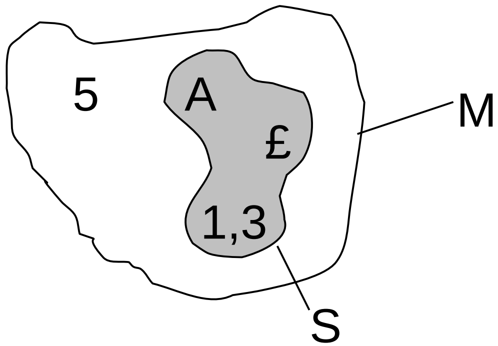
Leere Menge:

- Die Menge, die kein Element besitzt, wird **leere Menge** genannt

$\varnothing = \{ x \mid x + 2 = x \} = \{\}$ $\qquad |\varnothing| = 0$

Untermenge:

- Eine **Menge S** heißt **Untermenge** oder **Teilmenge** von M genau dann, wenn **jedes Element von S zu M** gehört



- Man schreibt:

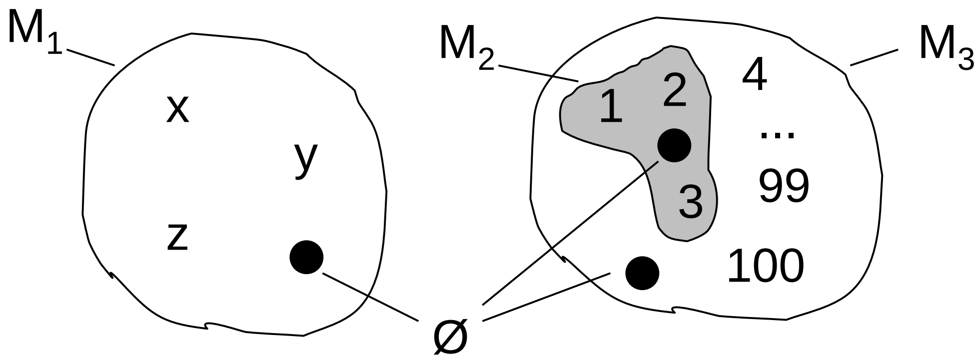
$$s \subseteq M$$

- Falls **S ungleich M** ist, so sagt man: „S ist echte Untermenge von M“ und schreibt:

$$s \subset M$$

Untermengen

Beispiele:



$$M_2 \subseteq M_3$$

$$\emptyset \subseteq M_1$$

$$\emptyset \subseteq M_3$$

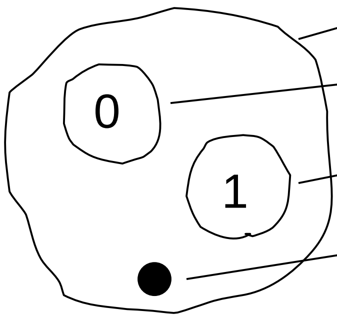
$$\emptyset \subseteq M_2$$

- Die **leere Menge** ist Untermenge jeder beliebigen Menge

Mengen

Potenzmenge:

- Die Menge aller Untermengen einer Menge M heißt **Potenzmenge P** von M:



$M = \{ 0, 1 \} \subseteq M$

$S_0 = \{ 0 \} \subseteq M$

$S_1 = \{ 1 \} \subseteq M$

$\varnothing = \{ \} \subseteq M$

$M = \{ 0, 1 \}$ $\qquad P(M) = \{ \varnothing, S_0, S_1, M \} = \{ \{ \}, \{ 0 \}, \{ 1 \}, \{ 0, 1 \} \}$

$|M| = 2$ $\qquad |P(M)| = 2^{|M|} = 4$

- **Achtung** bei der leeren Menge:

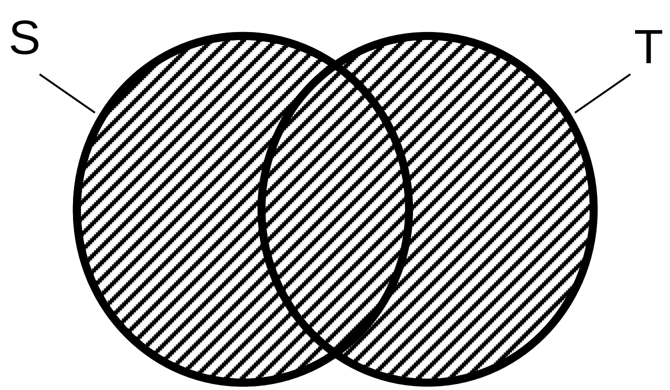
$|\varnothing| = 0$ $\qquad P(\varnothing) = \{ \varnothing \}$ $\qquad |P(\varnothing)| = 1$

Mengenoperationen

Vereinigung:

- Die **Vereinigung** zweier **Mengen S und T** ist die Menge aller Elemente x, die **mindestens** einer der Mengen S und T angehören:

$$V = S \cup T = \{ x \mid x \in S \text{ oder } x \in T \}$$

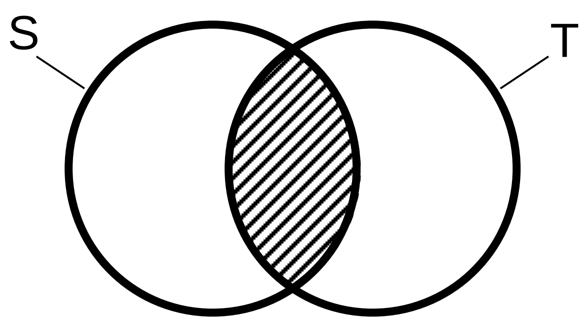


Mengenoperationen

Durchschnitt:

- Der **Durchschnitt zweier Mengen S und T** ist die Menge aller Elemente x, die **sowohl der Menge S als auch der Menge T** angehören:

$$V = S \cap T = \{ x \mid x \in S \text{ und } x \in T \}$$



Mengenoperationen

Durchschnitt:

- Für den **Durchschnitt** gilt allgemein:

$$\emptyset \subseteq S \cap T \subseteq S \subseteq S \cup T$$

$$\emptyset \subseteq S \cap T \subseteq T \subseteq S \cup T$$

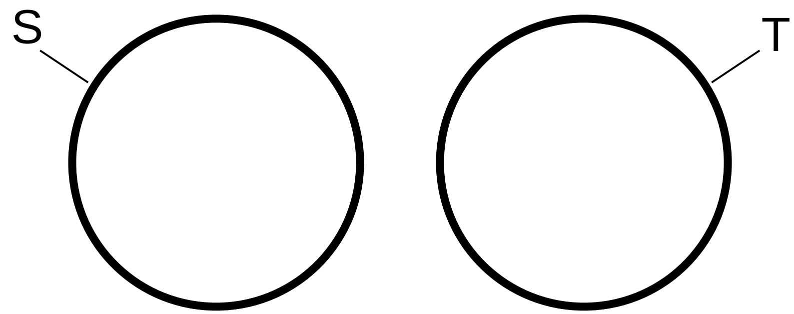
$$0 \leq |S \cap T| \leq |S| \leq |S \cup T|$$

$$0 \leq |S \cap T| \leq |T| \leq |S \cup T|$$

Mengen

Disjunkte Mengen:

- gibt es **kein Element x**, das sowohl **zur Menge S** als auch **zur Menge T** gehört, so heißen **S** und **T disjunkt** oder **elementefremd**



- **In diesem Fall gilt:**

$$S \cap T = \emptyset$$

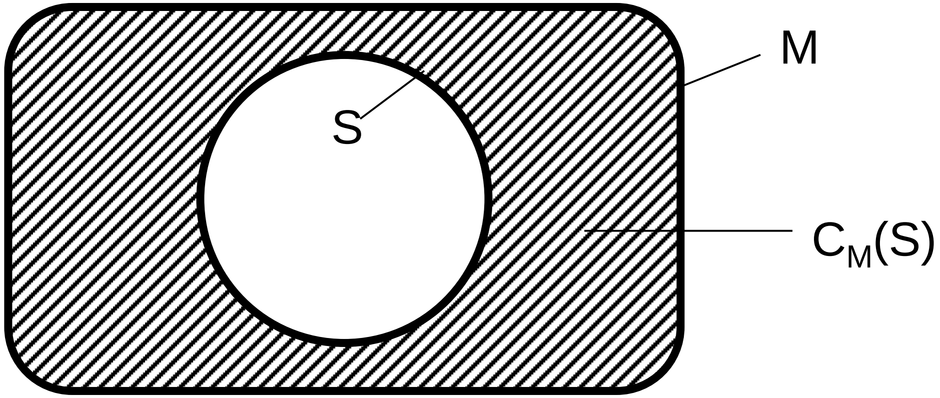
$$|S \cap T| = 0$$

$$|S \cup T| = |S| + |T|$$

Mengenoperationen

Komplement:

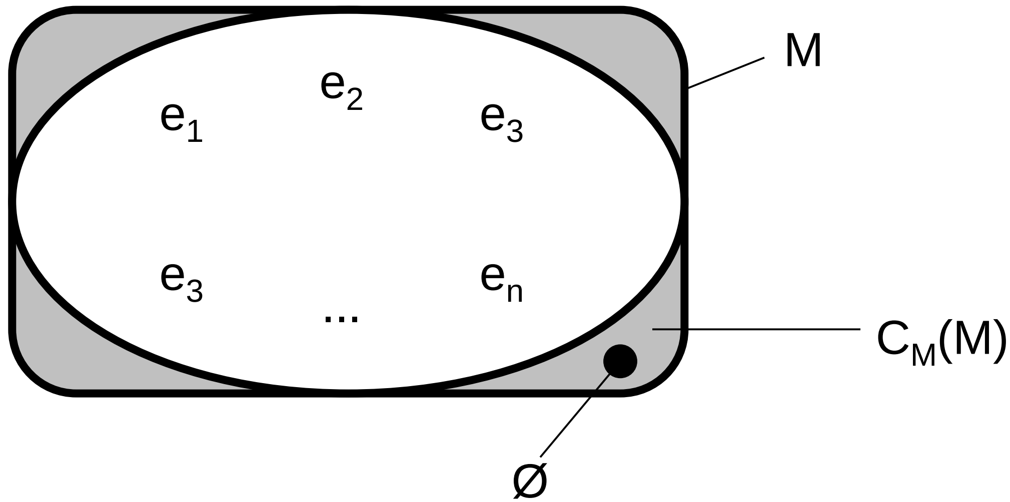
- Sei $S \subseteq M$
- Dann heißt die Menge aller Elemente von M, die nicht zu S gehören, das **Komplement von S bezüglich M**
- **Man schreibt:** $C_M(S)$
- Die Menge M wird in diesem Zusammenhang auch als **Bezugsmenge** bezeichnet



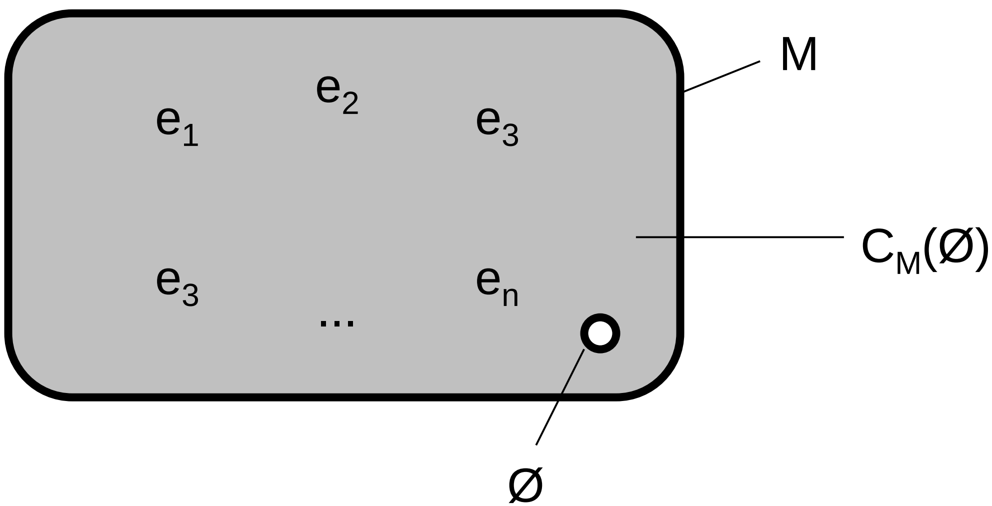
Mengenoperationen

Grenzfälle der Komplementbildung:

$C_M(M) = \varnothing$



$C_M(\varnothing) = M$



Mengenoperationen

Das kartesische Produkt:

- Unter dem **kartesischen Produkt S x T** (gesprochen: „S kreuz T“) zweier **Mengen S und T** versteht man die Menge aller **geordneten Paare (s,t)** mit $s \in S$ und $t \in T$
- Das **kartesische Produkt** ist **nicht kommutativ** d.h. i.a.:

$$S \times T \neq T \times S$$

- Für die **Mächtigkeit** gilt:

$$|S \times T| = |S| \cdot |T|$$

Beispiel:

$S = \{ 0, 1 \}$ $\quad T = \{ x, y, z \}$	$|S| = 2$ $\quad |T| = 3$
$S \times T = \{ (0,x), (0,y), (0,z), (1,x), (1,y), (1,z) \}$	$|S \times T| = 2 \cdot 3 = 6$
$T \times S = \{ (x,0), (x,1), (y,0), (y,1), (z,0), (z,1) \}$	$|T \times S| = 3 \cdot 2 = 6$

Mengenoperationen

Das kartesische Produkt:

- Das **n-fache kartesische Produkt S^n** der Menge S mit sich selbst ist die Menge aller **geordneten n-Tupel** (r, s, ..., z) mit $r \in S, s \in S, ..., z \in S$

$S^n = S \times S \times ... \times S$ $\qquad |S^n| = |S|^n$

Beispiel:

- $S = \{ 0, 1 \}$

  $S^2 = \{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \}$

  $S^3 = \{ (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1) \}$

- $IR = \{ x \mid x$ ist reelle Zahl $\}$

  $IR^3 = \{ (x,y,z) \mid x, y$ und z sind reelle Zahlen $\}$

  $\Rightarrow$ kartesisches Koordinatensystem