Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Jürgen Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Digitale Schaltfunktionen und Normalformtheoreme

Motivation

Schaltalgebra: - zulässige Interpretation der **Huntingtonschen Axiome**

- Basis für die formale Entwicklung binärer Digitalschaltungen

Schaltfunktion: - 2^n Zuordnungen $\mathbf{X_j} \rightarrow \mathbf{f_j}$ ($\mathbf{X_j}$ **Belegung**, $\mathbf{f_j}$ zugeordnete **Funktionswert**)

- <u>Begriffe:</u> *Nullstellenmenge* N, *Einsstellenmenge* E, *Redundanzmenge* R

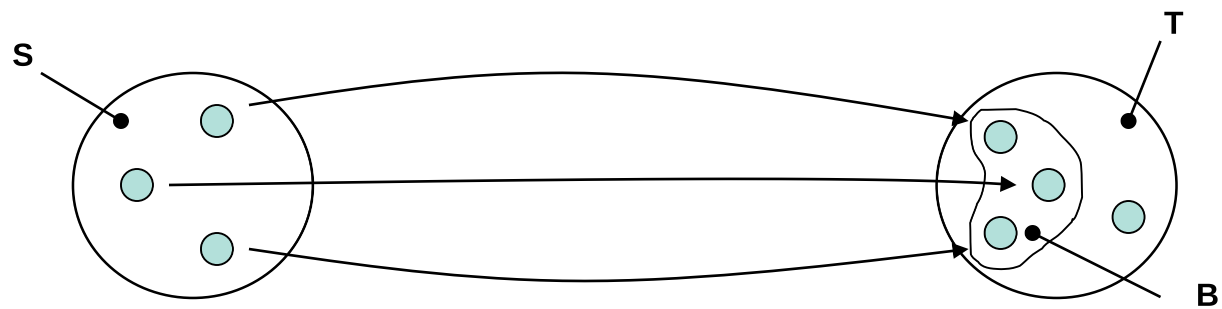
Anwendungen von Schaltfunktionen

<u>**Wichtig:**</u> **Kompakte Darstellungstechniken** und **formale Konstruktionsvorschriften** für beliebige **Schaltfunktionen** (unabhängig von n)

Arten von Funktionen

Arten von Funktionen:

→ **Injektion:** **Eineindeutige Abbildung** von S in T

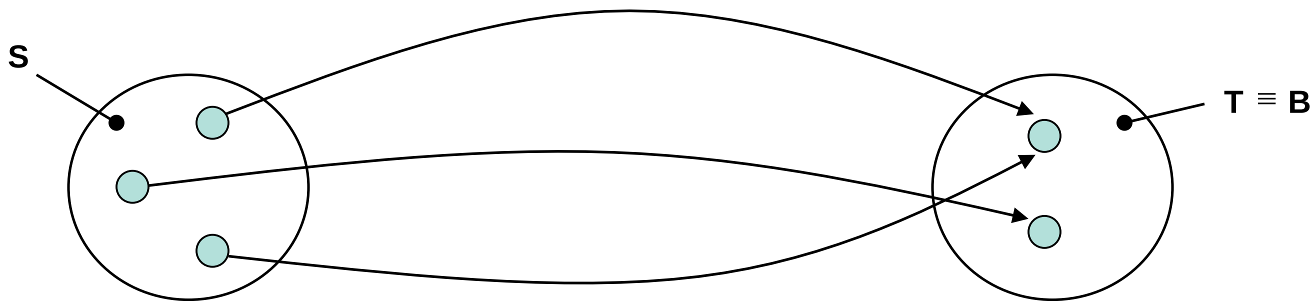


Jedem Element aus S wird genau
ein Element aus T zugeordnet.

Die Bildmenge ist Teilmenge der Zielmenge (**$B \subset T$**).

Arten von Funktionen

→ **Surjektion:** **Eindeutige Abbildung** von S auf T

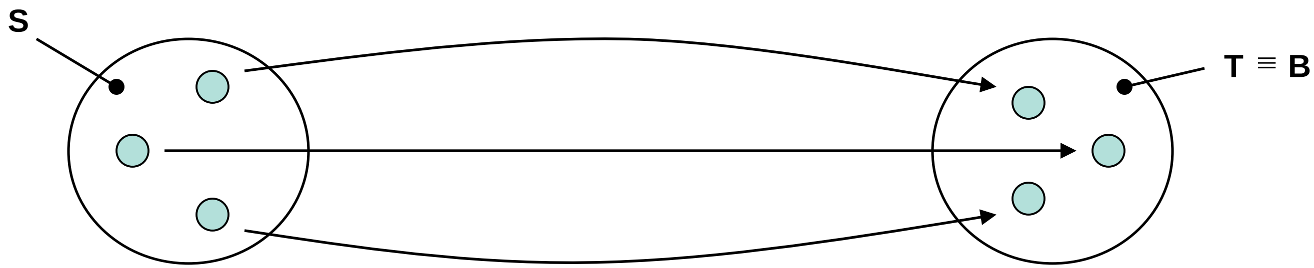


Verschiedene Elemente aus S können
denselben Elementen aus T zugeordnet sein.

Bild- und Zielmenge sind identisch (**B ≡ T**).

Arten von Funktionen

→ **Bijektion:** **Eineindeutige Abbildung** von S auf T



Funktion, die sowohl **Eigenschaften** der **Injektion** als auch der **Surjektion** aufweist.

Bild- und Zielmenge sind identisch (**B ≡ T**).

Funktionsbegriff

Funktionsbegriff: stellt offensichtlich **Beziehung** zwischen beiden **Mengen S** und **T** her

- **allgemein:** jede **eindeutige Relation** kann als **Funktion** aufgefasst werden

  → Funktion ist **Spezialfall der Relation**

- **Definition einer Funktion** (verschiedene Weisen):
  - durch **Angabe aller Paare (s,t)**, welche die Funktion festlegen (aufwendig!!!)
  - **Kurznotation:** z.B. $y = x!$

- Sei $\mathbf{S = \{ 0, 1 \}^n}$ das n-fache **kartesische Produkt** der Menge $\{ 0, 1 \}$ und $\mathbf{T = \{ 0, 1 \}}$

- **Definition einer Schaltfunktion** (s ist das Argument, t der Funktionswert):

Angabe **aller Paare (s, t)** mit $\mathbf{s \in \{ 0, 1 \}^n}$ (= ***Belegung***) und $\mathbf{t \in \{ 0, 1 \}}$

$X = (x_n, \dots , x_2, x_1)$

$x_i \in \{ 0, 1 \}$

$y \in \{ 0, 1 \}$

Funktionsdefinition

Karlsruhe Institute of Technology

Allgemein:

Schaltfunktion lässt sich schreiben als: $y = f(X) = f(x_n, \ldots, x_2, x_1)$

mit $x_n, \ldots, x_1$ **unabhängige** Variablen, **y abhängige** Variable der Funktion

Beispiel: **f** sei diejenige **Funktion**, die genau dann den Wert **y = 1** annimmt, wenn die Belegung von (a_3, a_2, a_1) eine **ungerade Anzahl** von **Einsen** aufweist

Abbildungsvorschrift:

$(a_3\ a_2\ a_1)$	$\xrightarrow{f}$	y
(0, 0, 0)	→	0
(0, 0, 1)	→	1
(0, 1, 0)	→	1
(0, 1, 1)	→	0
(1, 0, 0)	→	1
(1, 0, 1)	→	0
(1, 1, 0)	→	0
(1, 1, 1)	→	1

Funktionsdarstellung:

j_0	a_3	a_2	a_1	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Klassen von Schaltfunktionen

<u>häufig gilt:</u> **nicht allen Belegungen** kann/muss ein **Funktionswert zugeordnet** werden

- **solche Zuordnungen:** → **Redundanz-** oder **Freistellen** der Funktion
→ <u>Kennzeichnung:</u> $X_j \rightarrow$ **-** (sogenanntes ***don´t care***)
→ Stelle kann wahlweise mit **1** oder **0 belegt** werden

Ziffer	j_0	a_3	a_2	a_1	a_0	y
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
2	2	0	0	1	0	0
3	3	0	0	1	1	1
4	4	0	1	0	0	0
5	5	0	1	0	1	0
6	6	0	1	1	0	1
7	7	0	1	1	1	0
8	10	1	0	0	0	0
9	11	1	0	0	1	1
Pseudo-tetraden	12	1	0	1	0	-
	13	1	0	1	1	-
	14	1	1	0	0	-
	15	1	1	0	1	-
	16	1	1	1	0	-
	17	1	1	1	1	-

<u>Also:</u> 3 Teilmengen von Belegungen:

- **Nullstellenmenge** $N = \{ X_j \mid X_j \rightarrow 0 \}$
- **Einsstellenmenge** $E = \{ X_j \mid X_j \rightarrow 1 \}$
- **Redundanzmenge** $R = \{ X_j \mid X_j \rightarrow - \}$

<u>Beispiel:</u> Funktion mit Freistellen

→ Funktion für BCD Zahlen,
wobei Eingangskombinationen,
die Pseudotetraden entsprechen,
mit Freistellen belegt werden

Klassen von Schaltfunktionen

Reale technische Anwendungen:

→ Freistellen überwiegen häufig gegenüber 0- / 1-Stellen

→ Man definiert daher **zwei Hauptklassen** von **Funktionen**:

- eine **vollständig definierte Schaltfunktion:**
  → ordnet **allen Belegungen X_j** einen **Funktionswert** aus $f_j \in \{ 0, 1 \}$ zu

- eine **unvollständig definierte Schaltfunktion:**
  → ordnet **mindestens einer Belegung X_j** **keinen Funktionswert** aus $f_j \in \{ 0, 1 \}$ zu

→ **wegen $|\{0, 1\}| = 2^n$ gilt:**
bei **unvollständigen Schaltfunktionen** lässt sich aus jeweils zwei Teilmengen die **fehlende dritte Teilmenge bestimmen**

Graphische Darstellung von Funktionen

Neben tabellarischer Darstellung: es existieren **graphisch orientierte Darstellungen**

→ **Tafelmethoden**   (sogenannte **KV-Diagramme**),

vor über 100 Jahren von <u>K</u>arnaugh und <u>V</u>eitch vorgeschlagen

→ **Nachteile** von **KV-Diagrammen** bei **Werten n > 4** (unübersichtliche Darstellung!)

- **Prof. Lipp** hat KV-Diagramme mittels einer **neuen Symmetrierelation** auf **beliebiges n erweitert**

<u>Beispiel:</u> Darstellung einer **Schaltfunktion** mittels **Symmetriediagramm**

y

a_0

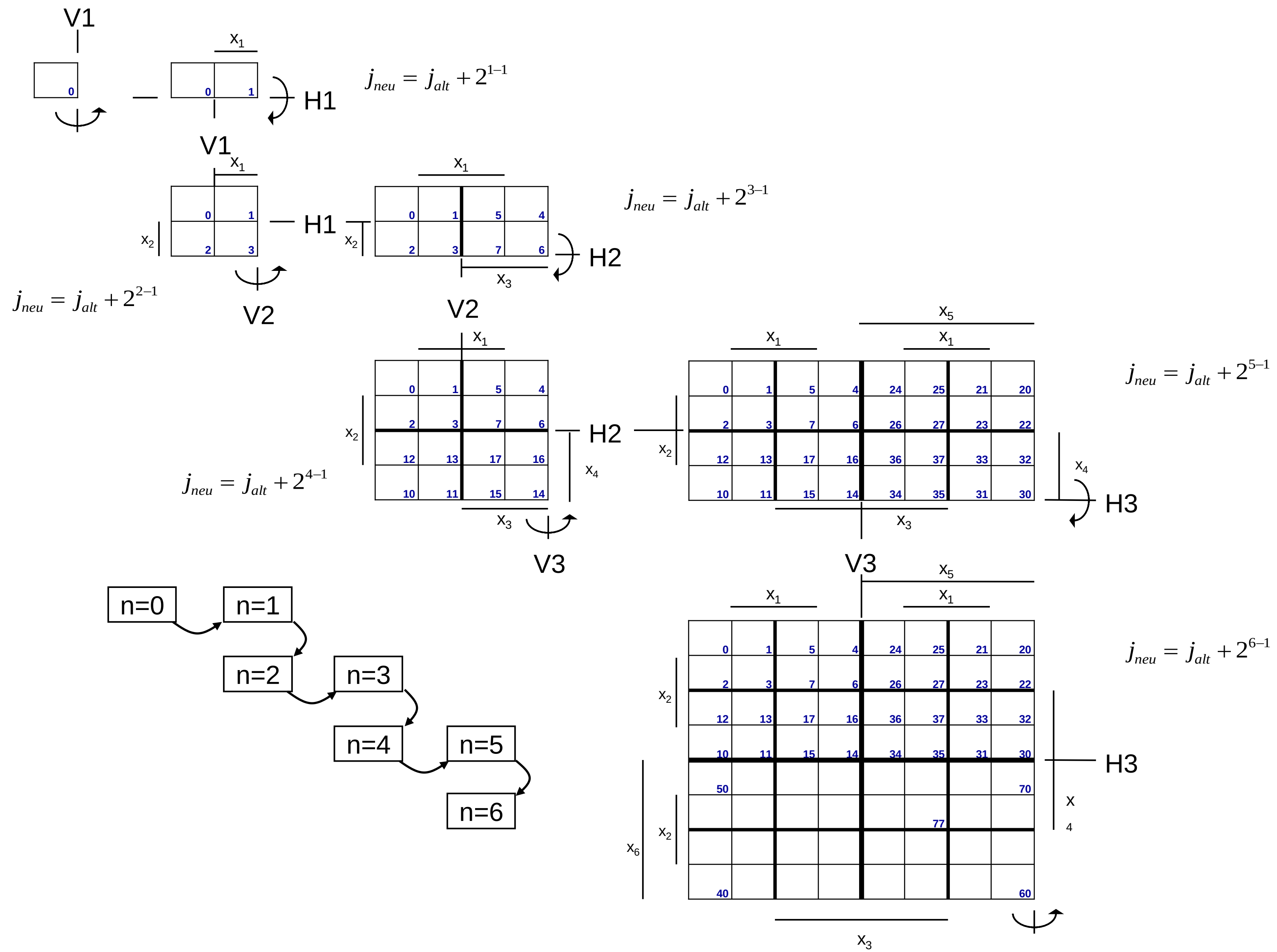
0 (0)	0 (1)	0 (5)	0 (4)
0 (2)	1 (3)	0 (7)	1 (6)
- (12)	- (13)	- (17)	- (16)
0 (10)	1 (11)	- (15)	- (14)

a_1

a_3

a_2

Symmetriediagramme



Graphische Darstellung von Funktionen

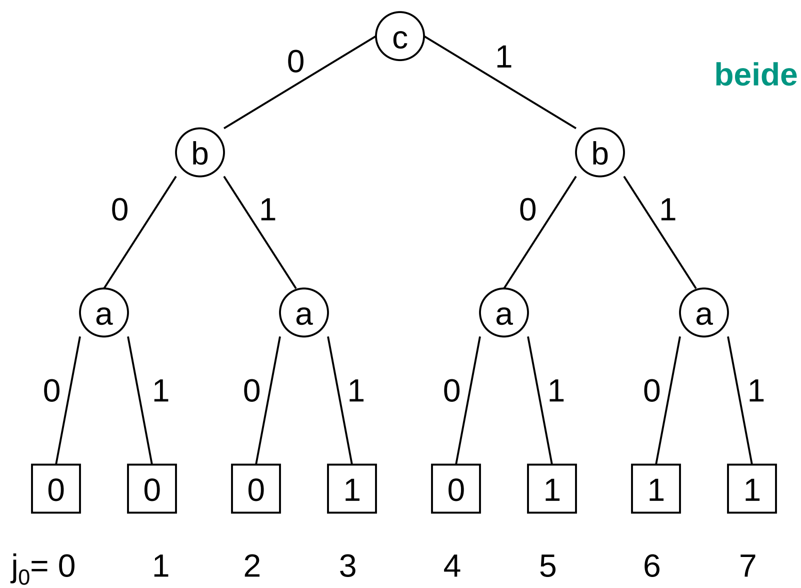
Spezifikation / Schaltfunktionen: **Funktionstabelle** stellt bei großen Werten von n **keine** besonders **effiziente Darstellungstechnik** dar, da die Spaltenzahl mit n, die **Zeilenzahl** jedoch mit **2^n wächst**

→ **Neben bereits vorgestellten Methoden Funktionen darzustellen:**

es existieren **weitere Möglichkeiten** zur Darstellung in Form **spezieller Graphen**

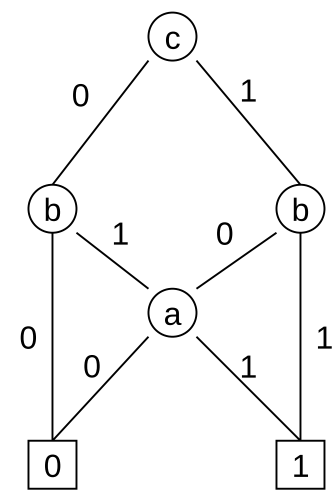
- z.B. **Binary Decision Diagrams (BDDs)**

Beispiel für die Darstellung mittels BDD:



beide Darstellungen: repräsentieren die **gleiche Funktion**

$\Leftrightarrow$



Graphische Darstellung von Funktionen

Binary Decision Diagrams (BDDs)

- **Funktionen** lassen sich **kanonisch** (eindeutig) darstellen

  → diese Eigenschaft von BDDs lässt für **Äquivalenzprüfungen** von **Funktionen** ausnutzen → **Isomorphie-Test**

- **darüber hinaus:** es existieren eine Reihe von Verfahren, welche die **rechnergestützte Verarbeitung** von in BDD-Form dargestellten Funktionen effizient ermöglichen

Schaltfunktionen

Eigenschaft: Anzahl möglicher Funktionen (MF) wächst explosionsartig!
→ Zahl einzelner Bildungsvorschriften und Namen zu groß!

Gesucht: Grundsätzliche Konstruktionsvorschrift für **Schaltfunktionen** (unabhängig von n) ?

Ziel: Anbindung an schaltalgebraische Notation: **Axiome** + **Regeln** anwendbar

Beispiele:

$n = 0$ $\quad$ MF = 2

$n = 1$ $\quad$ MF = 4

$n = 2$ $\quad$ MF = 16

$n = 3$ $\quad$ MF = 256

.
.

$n = 10$ $\quad$ MF = $2^{1024} \approx 10^{308}$

Mögliche Schaltfunktionen bei n=2

n = 2: MF = 16 $y = f(x_2, x_1)$

x_2	x_1	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	**0**	1	0	1	0	1	**0**	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	**0**	0	1	1	0	0	**1**	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	**0**	0	0	0	1	1	**1**	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	1	**1**	1
		—	neg. Disjunktion	(neg. Implikation)	—	neg. Implikation	—	Antivalenz	neg. Konjunktion	Konjunktion	Äquivalenz	—	Implikation	—	(Implikation)	Disjunktion	—

Eigene Symbole und Namen:

y_{10} :	**&**	**Konjunktion, UND-Verknüpfung,**	**AND**
y_{16} :	**V**	**Disjunktion, ODER-Verknüpfung,**	**OR**
y_7 :	$\overline{\&}$	neg. Konjunktion, neg. UND-Verknüpfung,	NAND (NOT AND)
y_1 :	$\overline{\vee}$	neg. Disjunktion, neg. ODER-Verknüpfung,	NOR (NOT OR)
y_6 :	$\not\equiv$	Antivalenz	XOR
y_{11} :	$\equiv$	Äquivalenz	
y_{13} :	$\rightarrow$	Implikation, x_2 impliziert x_1, $x_2 \rightarrow x_1$ (analog: y_{15} : x_1 impliziert x_2, $x_1 \rightarrow x_2$)	

Herleitung der Normalformtheoreme

<u>Besondere Funktionen:</u> Konjunktion und **Disjunktion**

- *Null-* und *Einsstellenmenge* teilen sich extrem auf, jeweils in: **1** zu **2^n-1** Belegungen

Konjunktion: $y = f(x_1, x_2) \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 = x_2 = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Disjunktion: $y = f(x_1, x_2) \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

- entsprechen den Operatoren der **Schaltalgebra** (Serien- und Parallelschaltungen)

→ **Anbindung dieser Schaltfunktionen an das axiomatische Gebäude!**

<u>Symmetriediagramme:</u>

Konjunktion

n = 2

$y = x_2$ & x_1

y		x_1
	0 (0)	0 (1)
x_2	0 (2)	**1** (3)

n = 3

$y = x_3$ & x_2 & x_1

y		x_1	x_1	
	0 (0)	0 (1)	0 (5)	0 (4)
x_2	0 (2)	0 (3)	**1** (7)	0 (6)
			x_3	x_3

Disjunktion

n = 2

$y = x_2$ V x_1

y		x_1
	0 (0)	1 (1)
x_2	1 (2)	1 (3)

n = 3

$y = x_3$ V x_2 V x_1

y		x_1	x_1	
	0 (0)	1 (1)	1 (5)	1 (4)
x_2	1 (2)	1 (3)	1 (7)	1 (6)
			x_3	x_3

Herleitung der Normalformtheoreme

Gesucht: **Grundsätzliche Konstruktionsvorschrift** für Schaltfunktionen (unabh. von n) ?

→ **Bauprinzip** in Anlehnung an die **Reihenentwicklung** in der Mathematik

- geeignete (bspw. orthogonale) **Basisfunktionen $b_k(x)$** und **Koeffizienten A_k**

$$y = f(x) = A_0 \cdot b_0(x) + A_1 \cdot b_1(x) + \ldots + A_{N-1} \cdot b_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot b_k(x)$$

Frage: gibt es Basisfunktionen und geeignete Koeffizienten für beliebige Schaltfunktionen ?

Notwendig: **Konjunktion / Disjunktion** -> Funktionswert **1** (**0**) **beliebiger Belegung** zuordnen können

n = 3:

Konjunktion: $y = x_3 \,\&\, x_2 \,\&\, x_1$

y

		x_1	x_1	
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	0_{4}
x_2	0_{2}	0_{3}	1_{7}	0_{6}
			x_3	x_3

Modifikation der Konjunktion

Beliebige Einsstelle: y = ?

y

		x_1	x_1	
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	1_{4}
x_2	0_{2}	0_{3}	0_{7}	0_{6}
			x_3	x_3

Abbildung der Belegung

$$y = x_3 \,\&\, \overline{x}_2 \,\&\, \overline{x}_1$$

Herleitung der Normalformtheoreme

Ergebnis: Belegungsabbildung -> beliebige Eins- / Nullstelle für **jede Belegung**

→ **Minterm-** und **Maxtermfunktionen**

Allgemein gilt für n = beliebig:

$$y = \ddot{x}_n \,\&\, \ddot{x}_{n-1} \,\&\ldots\&\, \ddot{x}_2 \,\&\, \ddot{x}_1 \qquad \ddot{x} = \begin{cases} x & \text{für } 1 \\ \bar{x} & \text{für } 0 \end{cases}$$

$$y = \ddot{x}_n \vee \ddot{x}_{n-1} \vee\ldots\vee \ddot{x}_2 \vee \ddot{x}_1 \qquad \ddot{x} = \begin{cases} \bar{x} & \text{für } 1 \\ x & \text{für } 0 \end{cases}$$

$$m_j = \ddot{x}_n \,\&\ldots\&\, \ddot{x}_1 \qquad \text{Minterm(funktion)}$$

$$M_j = \ddot{x}_n \vee\ldots\vee \ddot{x}_1 \qquad \text{Maxterm(funktion)}$$

$$m_j \,\&\, m_k = 0 \qquad M_j \vee M_k = 1 \qquad j \neq k,\ 0 \leq j, k \leq 2^n - 1$$

$$\overline{m}_j = M_j \qquad \overline{M}_j = m_j$$

$$m_j \,\&\, M_j = 0 \qquad m_j \vee M_j = 1$$

Beispiel: $n = 2$

$$m_0 = \bar{x}_2 \,\&\, \bar{x}_1, \quad m_1 = \bar{x}_2 \,\&\, x_1,$$
$$m_2 = x_2 \,\&\, \bar{x}_1, \quad m_3 = x_2 \,\&\, x_1$$

$$m_1 \,\&\, m_2 = \bar{x}_2 \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \bar{x}_1 = 0$$

Herleitung der Normalformtheoreme

Gesucht: **Grundsätzliche Konstruktionsvorschrift** für Schaltfunktionen (unabh. von n)

→ **Verwendung orthogonaler Minterm- und Maxtermbasisfunktionen ?**

Mögliche Funktion:

Disjunktion
aller
Minterme

n = 3:

y	$=$	m_0	v	m_1	v	m_2	v	m_3	v	m_4	v	m_5	v	m_6	v	m_7	x_3	x_2	x_1	j_0
1		1		0		0		0		0		0		0		0	0	0	0	0
1		0		1		0		0		0		0		0		0	0	0	1	1
1		0		0		1		0		0		0		0		0	0	1	0	2
1		0		0		0		1		0		0		0		0	0	1	1	3
1		0		0		0		0		1		0		0		0	1	0	0	4
1		0		0		0		0		0		1		0		0	1	0	1	5
1		0		0		0		0		0		0		1		0	1	1	0	6
1		0		0		0		0		0		0		0		1	1	1	1	7

Herleitung der Normalformtheoreme

Erweiterung: Einführung von **Koeffizienten A_j** für **Minterm-** und **Maxtermbasisfunktionen**
→ **beliebige Funktionsdarstellung**

Reihenentwicklung:
Gewichtung
der Basisfunktionen m_j
mit $A_j \in \{0, 1\}$

n = 3:

$y =$	$A_0\&m_0 \vee$	$A_1\&m_1 \vee$	$A_2\&m_2 \vee$	$A_3\&m_3 \vee$	$A_4\&m_4 \vee$	$A_5\&m_5 \vee$	$A_6\&m_6 \vee$	$A_7\&m_7$	x_3	x_2	x_1	j_0
A_0	A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_1	0	A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A_2	0	0	A_2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
A_3	0	0	0	A_3	0	0	0	0	0	1	1	3
A_4	0	0	0	0	A_4	0	0	0	1	0	0	4
A_5	0	0	0	0	0	A_5	0	0	1	0	1	5
A_6	0	0	0	0	0	0	A_6	0	1	1	0	6
A_7	0	0	0	0	0	0	0	A_7	1	1	1	7

Normalformtheoreme

Normalformen einer Schaltfunktion → kanonische Formen

Disjunktive Normalform (DNF): $y = (f_{2^n-1} \& m_{2^n-1}) \vee (f_{2^n-2} \& m_{2^n-2}) \vee \ldots \vee (f_1 \& m_1) \vee (f_0 \& m_0)$

oder kürzer $y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \& m_j)$

Konjunktive Normalform (KNF): $y = (f_{2^n-1} \vee M_{2^n-1}) \& (f_{2^n-2} \vee M_{2^n-2}) \& \ldots \& (f_1 \vee M_1) \& (f_0 \vee M_0)$

oder kürzer $y = \mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$

→ nur mit den **3 Grundverknüpfungen** (Operatoren) ***Konjunktion***, ***Disjunktion*** und ***Negation*** ist es möglich **jede beliebige Schaltfunktion** darzustellen

→ **[&, V, ¯] ist ein Basissystem der Schaltalgebra**

Hauptsatz der Schaltalgebra

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Satz: Jede **beliebige Schaltfunktion** $y = f(x_n, \ldots, x_1)$ läßt sich als **Disjunktion** von **Mintermen** <**Konjunktion** von **Maxtermen**> **eindeutig** darstellen. In der **Disjunktion** <**Konjunktion**> treten genau diejenigen **Minterme** <**Maxterme**> auf, die zu den Einsstellen <Nullstellen> der Schaltfunktion gehören.

Beispiel: $y = f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 1$, **wenn die Oktalzahl durch 3 dividierbar ist**

y		x_1	x_1		
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	0_{4}	
x_2	0_{2}	1_{3}	0_{7}	1_{6}	
x_2	0_{12}	0_{13}	1_{17}	0_{16}	x_4
	0_{10}	1_{11}	0_{15}	1_{14}	x_4
			x_3	x_3	

DNF:
$$y = (\bar{x}_4 \& \bar{x}_3 \& x_2 \& x_1) \vee (\bar{x}_4 \& x_3 \& x_2 \& \bar{x}_1) \vee (x_4 \& \bar{x}_3 \& \bar{x}_2 \& x_1) \vee (x_4 \& x_3 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_1) \vee (x_4 \& x_3 \& x_2 \& x_1)$$

KNF:
$$y = (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1) \& (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \& (x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \& (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1) \& (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \& (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \& (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1) \& (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \& (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \& (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \& (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1)$$

Beziehungen zwischen den Begriffen

$$\ddot{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij}\,, & wenn\ \ x_{ij} = 1 \\ \bar{x}_{ij}\,, & wenn\ \ x_{ij} = 0 \end{cases}$$

Index

$$j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot 2^{i-1} = x_{nj} \ldots x_{2j}\, x_{1j}$$

Bsp.: 0 … 1 1

$m_j = \overline{M}_j$ $\qquad$ $M_j = \overline{m}_j$

Minterm

$$m_j = \mathop{\&}_{i=1}^{n} \ddot{x}_{ij} = \ddot{x}_{nj} \,\&\ldots\&\, \ddot{x}_{2j} \,\&\, \ddot{x}_{1j}$$

Bsp.: $\bar{x}_n \,\&\ldots\&\, x_2 \,\&\, \bar{x}_1$

Belegung

$$X_j = (x_{nj}, \ldots, x_{2j}, x_{1j})$$

Bsp.: (0, … , 1, 1)

Maxterm

$$M_j = \bigvee_{i=1}^{n} \bar{\ddot{x}}_{ij} = \bar{\ddot{x}}_{nj} \vee \ldots \vee \bar{\ddot{x}}_{2j} \vee \bar{\ddot{x}}_{1j}$$

Bsp.: $x_n \vee \ldots \vee \bar{x}_2 \vee x_1$

DNF

$$f = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \,\&\, m_j) = \bigvee m_j \Big|_{f_j=1}$$

Funktionstabelle

$$f : \{(X_j, f_j) \mid f_j = f(X_j)\}$$

KNF

$$f = \mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j) = \& M_j \Big|_{f_j=0}$$

Praktische Anwendung

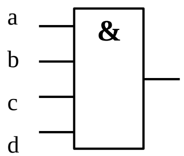
Notwendig: für jeden Operatortyp eine passende technische Realisierung

→ **Schaltglieder (Gatter)** für **Konjunktion**, **Disjunktion** und **Negation**

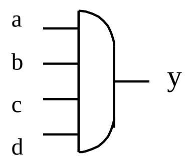
Schaltzeichen nach der neuen Norm (DIN 40900):

(Zum Vergleich alte Norm)

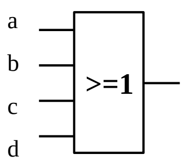
UND-Glied :



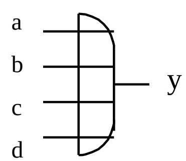
y = a & b & c & d



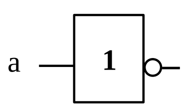
ODER-Glied :



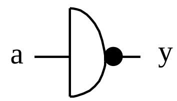
y = a v b v c v d

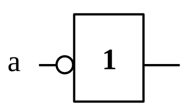


Negationsglied:

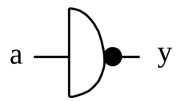


$y = \overline{a}$



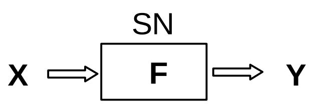


$y = \overline{a}$



Definition: Schaltnetz (angelehnt an DIN IEC 748)

Ein **Schaltnetz** ist eine Digitalschaltung, in der es für jede mögliche Kombination von digitalen Signalen an den Eingängen eine - und nur eine - Kombination von digitalen Signalen an den Ausgängen gibt:



$Y^t = F(X^t)$

Praktische Anwendung

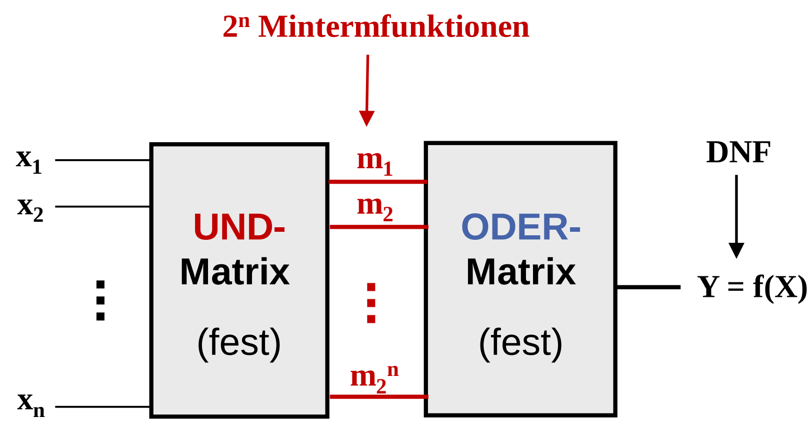
Karlsruhe Institute of Technology

Normalformorientierte Strukturen:

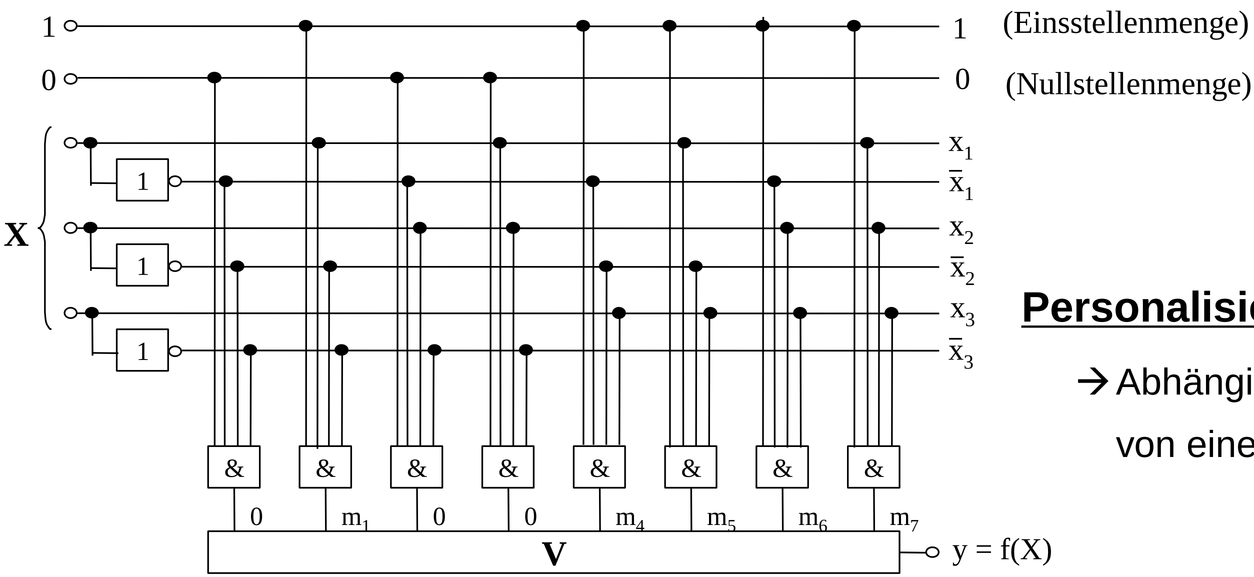
-> DNF als Beispiel

-> 2^n **UND-Glieder** in der 1. Stufe und ein bzw. mehrere **ODER-Glieder** in der 2 Stufe

-> **Beispiel 1:** ULA (Universal Logic Array)



Beispiel: $y = m_1 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$



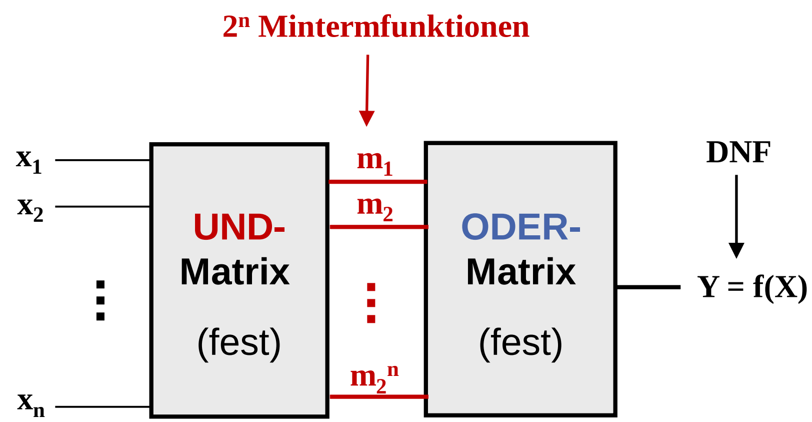
Personalisierung (Programmierung):

→ Abhängigkeit des **Funktionswertes f_j** von einem **Minterm m_j** wird festgelegt

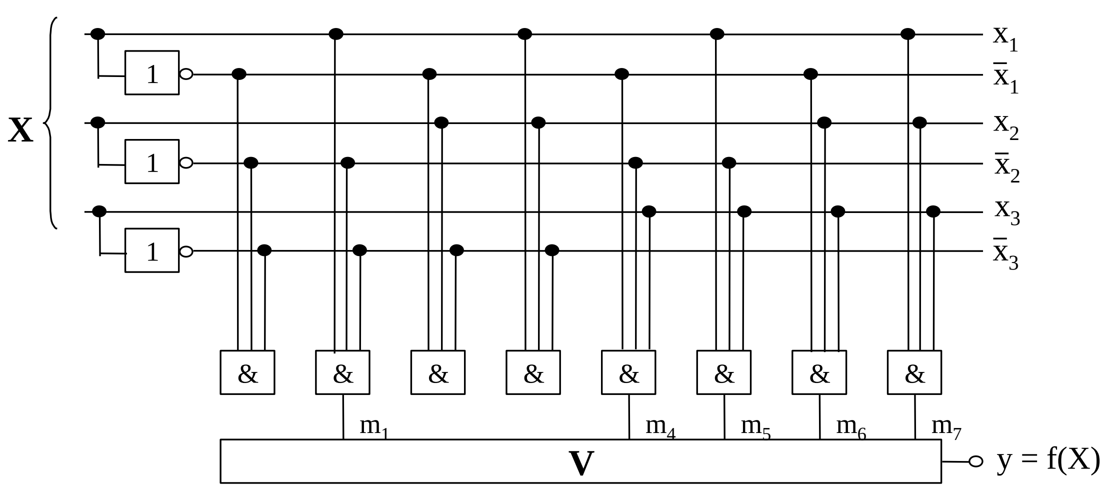
Praktische Anwendung

Normalformorientierte Strukturen:

-> **Beispiel 2:** ROM (Read Only Memory)



Beispiel: $y = m_1 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$



Personalisierung erfolgt in der 2. Stufe

Basissysteme der Schaltalgebra

Es gilt:

Normalformtheoreme und der **Hauptsatz der Schaltalgebra**

→ zeigen die **eindeutige Darstellbarkeit** beliebiger Schaltfunktionen

mittels der **3 Grundverknüpfungen** ***Konjunktion***, ***Disjunktion***, ***Negation***

→ **daher:** man bezeichnet diese **3 Verknüpfungen [&, V, ‾]**

als ein **Basissystem der Schaltalgebra**

→ **weiterhin:** -es existieren **weitere Basissysteme**

-lassen sich mittels der **De Morgan´schen Theoreme**

vom ersten Basissystem **ableiten**:

$$\overline{x_2 \vee x_1} = \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{x_2 \,\&\, x_1} = \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$$

Basissysteme der Schaltalgebra

Also:

- Neben dem bereits vorgestellten Basissystem mit **3 Verknüpfungen [&, V, ‾]** **existieren Basissysteme** mit **zwei** oder gar **einem Operator**

Beispiel: Herleitung von **Basissystemen** mit **2 Verknüpfungen [&, ‾]** bzw. **[V, ‾]** ausgehend von **DNF** bzw. **KNF**

$$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \,\&\, m_j\right) \quad \text{bzw.} \quad y = \mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \vee M_j\right)$$

$$y = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \,\&\, m_j\right)}} \quad \text{bzw.} \quad y = \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \left(f_j \vee M_j\right)}}$$

$$y = \overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \overline{\left(f_j \,\&\, m_j\right)}} \quad \text{bzw.} \quad y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \overline{\left(f_j \vee M_j\right)}}$$

$$y = \overline{\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} \left(\overline{f_j} \vee \overline{m_j}\right)} \quad \text{bzw.} \quad y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} \left(\overline{f_j} \,\&\, \overline{M_j}\right)}$$

Basissysteme der Schaltalgebra

Weiterhin: **DNF realisiert nur Minterme $f_j = 1$** **und** **KNF nur Maxterme $f_j = 0$**

$$\overline{f_j} = 0$$

$$\overline{f_j} \vee \overline{m_j} = \overline{m_j}$$

$$y = \overline{\&}\,\overline{m}_j\Big|_{f_j=1}$$

und

$$\overline{f_j} = 1$$

$$\overline{f_j} \,\&\, \overline{M_j} = \overline{M_j}$$

$$y = \overline{\bigvee}\,\overline{M}_j\Big|_{f_j=0}$$

man erhält :

Also: man erhält **zwei neue Basissysteme** mit jeweils nur einer **einzigen Verknüpfung**,

denn: $[\overline{\&}]$ und $[\overline{\vee}]$ bilden ebenfalls Basissysteme der Schaltalgebra

wobei: Negationen einzelner Variablen werden mit Konstanten 0 / 1 dargestellt:

$$x = x \,\&\, 1 \quad \text{(Regel 5b)} \qquad\qquad x = x \vee 0 \quad \text{(Regel 5a)}$$

$$\overline{x} = \overline{x \,\&\, 1} \qquad\qquad \overline{x} = \overline{x \vee 0}$$